

UNIVERSITE DE RENNES

U.E.R. "STRUCTURE ET PROPRIETES DE LA MATIERE"

CONTRIBUTION A LA THEORIE DE LA STABILITE DES OSCILLATIONS
LONGITUDINALES D'UN FAISCEAU ACCELERE EN REGIME DE CHARGE D'ESPACE

MEMOIRE

présenté devant l'Université de Rennes

pour obtenir

Le grade de Docteur ès-Sciences Physiques

par

Gilbert BESNIER

1978

SOMMAIRE

INTRODUCTION

I - RAPPELS SUR LA THEORIE DE LA STABILITE DES OSCILLATIONS COLLECTIVES

I-1- Equation du mouvement individuel des particules

I-1-1- Le champ électrique d'interaction

I-1-2- Déviation de fréquence synchrotronique $\Delta\Omega_{sc}$ due à la charge d'espace stationnaire

I-1-3- Dispersion S des fréquences synchrotroniques

I-1-4- L'interaction en fonction du nombre d'ondes de la densité perturbée

I-2- Equation des petites oscillations collectives du faisceau

I-2-1- L'équation de Vlasov linéarisée

I-2-2- Description des modes collectifs

I-3- Les approximations usuelles de la théorie de la stabilité d'un mode collectif. Exemple du mode dipolaire

I-3-1- Simplification de l'interaction

I-3-2- Relation de dispersion

I-3-3- Diagrammes de stabilité

II - SOLUTIONS DE L'EQUATION DE VLASOV DEVELOPPEES EN SERIE DE MODES NORMAUX

II-1- Rappel de propriétés générales des solutions

II-1-1- Equation intégrale pour les modes radiaux

II-1-2- Modes normaux et adjoints de F. Sacherer. Propriétés d'orthogonalité

II

II-2- Résolution de l'équation intégrale pour les modes radiaux

II-2-1- Cas d'une dispersion nulle des fréquences incohérentes. Eléments de la matrice d'interaction [$^0M^n$]

II-2-2- Résolution de l'équation complète. Eléments de la matrice de dispersion [$^1M^n$]

II-3- Variation des fréquences propres ω_{mn} en fonction de la dispersion synchrotronique S

II-3-1- Déviation des fréquences propres due à la charge d'espace gaussienne, dans l'approximation du noyau synthétique

II-3-2- Cas de l'interaction exacte (impédance de paroi purement réactive)

III - RESOLUTION DU PROBLEME A VALEUR INITIALE : OSCILLATION LIBRE D'UNE PERTURBATION INITIALE DE LA DENSITE

III-1- Traitement de Landau-Case. Approximation du noyau synthétique

III-1-1- La transformation de Laplace à deux contours d'inversion

III-1-2- Relation de dispersion et solution asymptotique du temps

III-1-3- Oscillation collective possédant un spectre continu de fréquences

III-2- Application de la méthode de perturbation à l'interaction exacte $\propto \frac{\partial \lambda}{\partial z}$

III-2-1- Solution du problème à valeur initiale décrite par la densité du spectre des fréquences collectives

III-2-2- Solution du problème à valeur initiale décrite par une relation de dispersion

III

III-3- Applications de la relation de dispersion

III-3-1- Situation des fréquences collectives par rapport
à la bande des fréquences incohérentes

III-3-2- Diagramme de stabilité du mode dipolaire pour
l'interaction simplifiée $\propto \bar{z}(t)$

III-3-3- Diagrammes de stabilité des modes collectifs pour
l'interaction exacte $\propto \frac{\partial \lambda}{\partial z}$

CONCLUSION

APPENDICES

REFERENCES

INTRODUCTION

Les expériences qui utilisent des faisceaux de particules chargées de grande énergie nécessitant des intensités souvent élevées, bon nombre de travaux consacrés aux accélérateurs se rapportent à l'accroissement de l'intensité des faisceaux. Les forces répulsives de charge d'espace, qui s'opposent aux forces de focalisation appliquées aux particules, sont une cause fondamentale de limitation en intensité. En fait, cette limite est atteinte bien en-deçà de l'intensité critique de charge d'espace qui équilibrerait la focalisation, et se manifeste sous la forme d'ondes collectives de charge d'espace, pouvant conduire à la détérioration du faisceau, par suite de l'impact sur les parois.

Ces oscillations collectives peuvent être décrites en termes de modes propres d'oscillation de la densité, dont la forme est déterminée par la fonction de distribution en amplitude des oscillations individuelles des particules. Lorsqu'elles sont soumises à l'action de forces appliquées et de charge d'espace linéaires, les particules oscillent à une même fréquence incohérente. Dans ce cas les modes ont été décrits de manière exacte comme étant les solutions d'une équation de Vlasov pour la fonction de distribution des particules dans l'espace des phases ^{1,2)}. Les modes sont caractérisés par des fonctions propres continues et un spectre discret de fréquences propres.

Considérant ici le mouvement longitudinal d'un faisceau, les oscillations synchrotroniques des particules sont non-linéaires, et caractérisées par une bande continue de fréquences incohérentes entre le centre et le bord du faisceau. On peut donc s'attendre à des oscillations collectives présentant également un spectre de fréquence purement ou partiellement continu. A défaut de solutions exactes pour l'équation de Vlasov décrivant cette situation, nous développons une méthode de perturbation dont les bases ont été définies par F. Sacherer ³⁾.

En première partie nous rappelons la théorie de la stabilité ⁴⁾ des oscillations collectives. Le critère de stabilité, en relation avec l'amortissement de Landau ⁵⁾, est fondé sur la comparaison des déviations de fréquences incohérentes et collectives (ou cohé-

rentes) dues à la charge d'espace. Le champ électrique longitudinal de charge d'espace résulte de l'interaction du faisceau avec la paroi conductrice de la chambre à vide, et nous nous limitons au cas d'une impédance de paroi purement réactive, car la très faible résistivité de la paroi peut être négligée lorsqu'on détermine les seuils de stabilité des faisceaux groupés.

En deuxième partie nous développons une méthode de perturbation qui permet de ramener la résolution de l'équation de Vlasov à la résolution d'un problème algébrique à valeurs propres. Dans sa formulation matricielle la plus élémentaire, la méthode permet de situer les fréquences propres aux modes collectifs par rapport à la bande des fréquences incohérentes, et donc d'appliquer le critère de stabilité. Les calculs sont appliqués au cas d'un faisceau à variation longitudinale parabolique, pour lequel le champ de charge d'espace est linéaire, et à un faisceau de densité gaussienne avec champ non linéaire.

En troisième partie nous adaptons la formulation matricielle à l'étude de l'évolution dans le temps d'une perturbation initiale de la densité du faisceau. On obtient ainsi une approximation du spectre continu pour la fréquence d'une oscillation collective, analogue au spectre de Van-Kampen ⁶⁾ et Case ⁷⁾ en physique du plasma. On montre enfin qu'une relation de dispersion pour les fréquences collectives peut être établie à l'aide de la formulation matricielle. Cette relation de dispersion tient compte du couplage qui existe entre le mode le plus cohérent et souvent le plus instable, et des modes secondaires qui, jusqu'à présent, ont été négligés dans la théorie de la stabilité.

I - RAPPELS SUR LA THEORIE DE LA STABILITE DES OSCILLATIONS COLLECTIVES D'UN FAISCEAU

Le mouvement longitudinal des particules est régi par l'équation des oscillations synchrotroniques, qui sont des oscillations en phase et en énergie par rapport à la particule synchrone du champ électrique accélérateur. Les oscillations collectives du faisceau, qui sont dues aux interactions des particules chargées avec l'environnement conducteur, sont les solutions d'une équation de Vlasov pour la fonction de distribution des particules. En rappelant ces équations, nous passerons en revue les différentes approximations qui ont permis d'établir une théorie de la stabilité des oscillations collectives.

I-1- Equation du mouvement individuel des particules

Les principaux paramètres géométriques du faisceau sont précisés à l'aide de la Figure 1, sur l'exemple d'un anneau du booster comportant 5 paquets de particules (préaccélérateur comprenant 4 anneaux identiques, élevant l'énergie du faisceau de 50 MeV à 800 MeV, entre l'accélérateur linéaire et l'injection dans le synchrotron de 30 GeV). Ces paramètres sont (unités M.K.S.A.; S.I.)

2ℓ : la longueur totale d'un paquet de particules

$\delta\phi$: l'extension azimutale d'un paquet de particules (en radians de la phase du champ accélérateur)

L : la séparation entre deux paquets

$B = \frac{\delta\phi}{2\pi} = \frac{2\ell}{L}$, le facteur de groupement

Désignant par z la distance qui sépare une particule arbitraire de la particule synchrone, l'équation du mouvement longitudinal s'écrit

$$\ddot{z} + \Omega_{so}^2 z = \frac{F(z,t)}{\gamma m_0} = -\eta \frac{eE_z}{\gamma m_0} (z,t), \quad (I-1)$$

Ω_{so} : fréquence (angulaire) synchrotronique en l'absence de charge d'espace, ou "fréquence non perturbée"

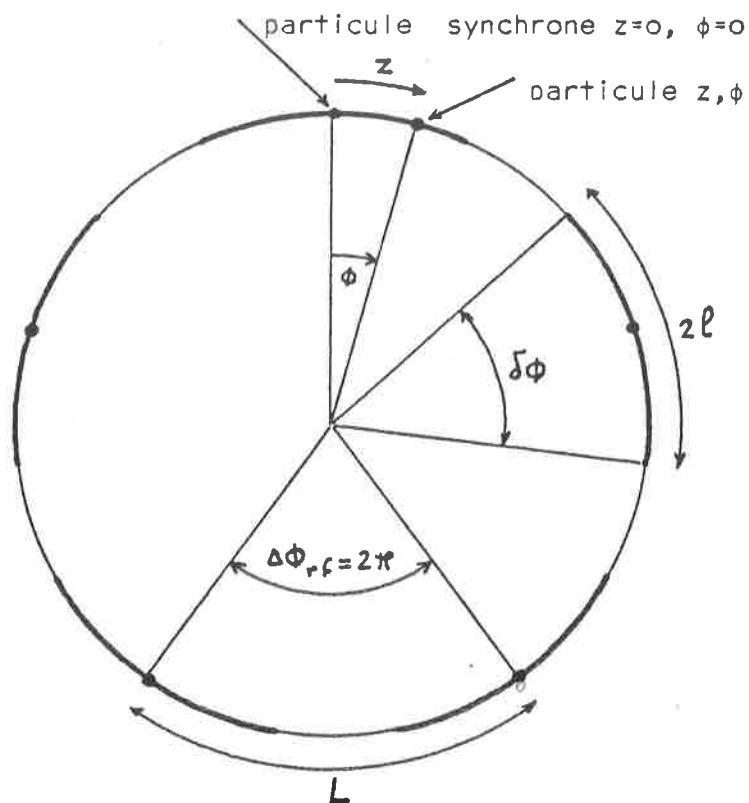


Fig. 1 - Paramètres géométriques du faisceau

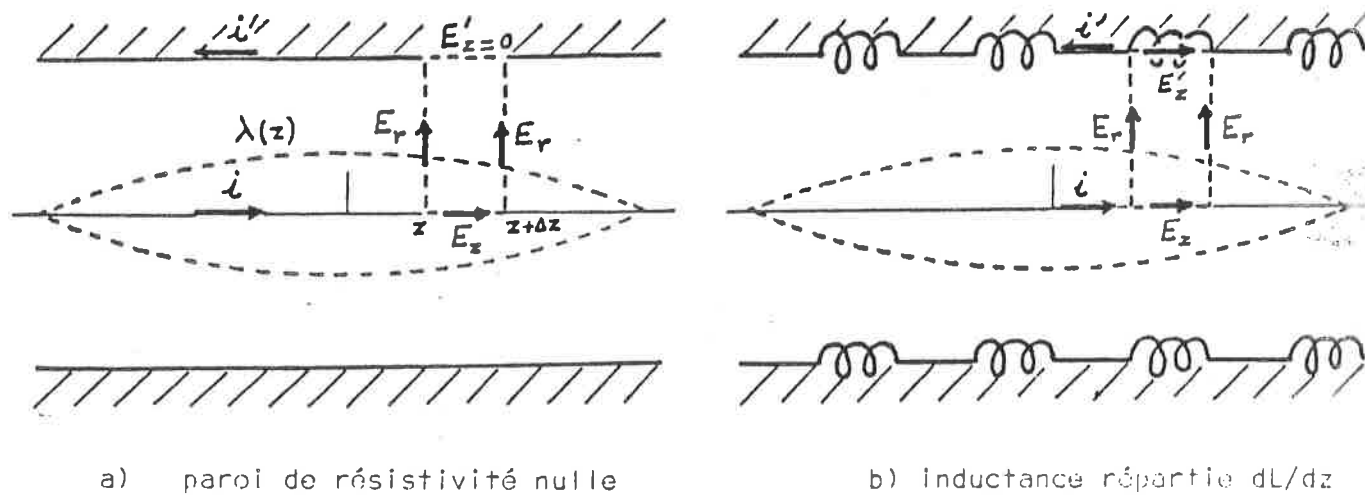


Fig. 2 - Configuration du champ électrique engendré par l'interaction du faisceau avec la paroi (référence 9)

DIMENSIONNÉES	coordonnées d'une particule	distribution parabolique	distribution gaussienne	normalisation
	axe réel z	$\lambda_0(z) = \frac{3}{4\ell} \left(1 - \frac{z^2}{\ell^2}\right)$	$\lambda_0(z) = \frac{e^{-z^2/2\sigma_z^2}}{\sigma_z \sqrt{2\pi}}$	$\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda_0(z) dz = 1$
NON DIMENSIONNÉES	plan de phase $\begin{cases} z = r_z \cos\theta \\ \dot{z}/\Omega_{so} = r_z \sin\theta \end{cases}$	$f_0(r_z) = \frac{3(1-r_z^2/\ell^2)^{1/2}}{2\pi\Omega_{so}\ell^2}$	$f_0(r_z) = \frac{e^{-r_z^2/2\sigma_z^2}}{2\pi\Omega_{so}\sigma_z^2}$	$2\pi\Omega_{so} \int_0^\infty f_0(r_z) r_z dr_z = 1$
	axe réel z	$\lambda_0(z) = \frac{3}{4} (1-z^2)$	$\lambda_0(z) = e^{-z^2}/\sqrt{\pi}$	$\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda_0(z) dz = 1$
NON DIMENSIONNÉES	plan de phase $\begin{cases} z = r \cos\theta \\ \dot{z}/\Omega_{so} = r \sin\theta \end{cases}$	$f_0(r) = \frac{3(1-r^2)^{1/2}}{2\pi\Omega_{so}}$	$r = r_z/\sigma$ $f_0(r) = \frac{e^{-r^2}}{\pi\Omega_{so}}$	$2\pi\Omega_{so} \int_0^\infty f_0(r) r dr = 1$
	axe réel z	$r = r_z/\ell$		

Tableau 1 - Fonctions de distribution normalisées pour les faisceaux parabolique et gaussien.
Variables et densités dimensionnées et non dimensionnées

e, m_0 : charge et masse du proton au repos

$$\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}, \quad v = \beta c, \text{ vitesse longitudinale du faisceau}$$

$E_z(z, t)$: champ électrique longitudinal dû à l'interaction du faisceau avec la paroi conductrice

$\eta = \gamma_T^{-2} - \gamma^{-2}$, paramètre indiquant le changement de phase synchrone à l'énergie de transition du synchrotron. η est négatif avant la transition.

L'équation (1) ne tient compte pour l'instant que d'une force de rappel synchrotrique linéarisée par rapport à z . Si de plus on néglige l'interaction au 2^{nd} membre, et que l'on considère dans le plan de phase $z, \dot{z}/\Omega_{so}$ les variables polaires r_z, θ (Tableau 1), r_z^2 est une intégrale du mouvement, et les trajectoires dans ce plan sont donc des cercles de rayon r_z . Il en résulte que toute distribution de particules à symétrie circulaire dans ce plan :

$$f_0(z, \dot{z}) = f_0(r_z), \quad \frac{\partial f_0}{\partial \theta} = 0 \quad (\text{I-2})$$

est une distribution stationnaire. Nous envisageons deux distributions stationnaires normalisées (Tableau 1), décrivant un paquet de N particules et une charge $Ne\lambda_0(z)$ par unité de longueur :

$$\lambda_0(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_0(z, \dot{z}) d\dot{z} \quad (\text{I-3})$$

Dans le cas d'une densité gaussienne, σ_z est la demi-longueur moyenne quadratique du faisceau

$$\sigma_z^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 \lambda_0(z) dz \quad (\text{I-4})$$

reliée à l'amplitude moyenne quadratique σ des oscillations synchrotroniques par

$$\sigma^2 = \iint_{-\infty}^{+\infty} r_z^2 f_0(z, \dot{z}) dz d\dot{z} = 2\pi\Omega_{so} \int_0^\infty r_z^2 f_0(r_z) r_z dr_z = 2\sigma_z^2 \quad (\text{I-5})$$

I-1-1- Le champ électrique d'interaction

Un faisceau cylindrique, de rayon a faible par rapport à sa longueur $2l$, se propageant suivant l'axe d'un cylindre conducteur de rayon b , engendre un champ électrique radial proportionnel à la densité de charge $Ne\lambda(z,t)$ soit, à la distance r_a de l'axe du faisceau :

$$E_r(z,t) = \frac{Ne\lambda(z,t)r_a}{2\pi\epsilon_0\gamma^2 a^2} , \quad r_a < a , \quad \frac{a}{2l} \ll 1 \quad (I-6)$$

$$E_r(z,t) = \frac{Ne\lambda(z,t)}{2\pi\epsilon_0\gamma^2 r_a} , \quad r_a > a ,$$

où le facteur γ^{-2} tient compte de la compensation par le champ magnétique de la force radiale qui s'exerce sur une particule. Le champ électrique radial induit dans une paroi de résistivité nulle une densité superficielle de charge négative, donc un courant image de sens opposé, et un champ électrique nul

$$i'(z,t) = -i(z,t) = -Ne\lambda(z,t) , \quad (I-7)$$

$$E'_z(z,t) = 0 . \quad (I-8)$$

De la circulation du champ le long du circuit élémentaire de la Figure 2a se déduit le champ longitudinal ⁸⁾ sur l'axe du faisceau :

$$E_z(z,t) = - \frac{Ne g_0}{4\pi\epsilon_0\gamma^2} \frac{\partial\lambda(z,t)}{\partial z} , \quad (I-9)$$

$$g_0 = 1 + 2 \log \frac{b}{a} .$$

L'effet d'une impédance de paroi purement réactive a été étudié par S. Hansen & ⁹⁾ en considérant une inductance répartie dL/dz par unité de longueur. Le courant image i' (7) engendre alors dans la paroi un champ électrique non nul (Figure 2b)

$$E'_z(z,t) = \frac{dL}{dz} \frac{\partial i'}{\partial t} = - \frac{dL}{dz} \frac{\partial i}{\partial t} \quad , \quad (I-10)$$

et l'expression (9) du champ électrique sur l'axe du faisceau devient

$$E_z(z,t) = - Ne \left(\frac{g_0}{4\pi\epsilon_0\gamma^2} - \beta^2 c^2 \frac{dL}{dz} \right) \frac{\partial \lambda}{\partial z} \quad . \quad (I-11)$$

Cette expression montre que l'effet de conductivité pure de la paroi domine aux faibles énergies ($\gamma \gg 1$, cas du booster), alors que l'effet d'inductance croît en fonction de la vitesse βc du faisceau (cas des anneaux de stockage ⁹⁾ ISR de 30 GeV). Nous verrons plus loin (paragraphe 1-1-4) qu'un champ électrique proportionnel à la variation longitudinale de densité est caractéristique d'une interaction à très faible rayon d'action. En conséquence, les oscillations des différents paquets de particules pourront être considérées comme étant découplées.

I-1-2- Déviation de fréquence synchrotrique $\Delta\Omega_{sc}$ due à la charge d'espace stationnaire

La force de charge d'espace stationnaire perturbe la force de rappel synchrotrique qui s'exerce sur les particules, produisant ainsi une déviation de la fréquence synchrotrique (égale à Ω_{so} pour une interaction nulle).

a) densité parabolique

Le champ électrique stationnaire (9) et (11) est linéaire en z , (densité du Tableau 1) soit, en se limitant à l'effet de conductivité pure de la paroi (9) :

$$E_{zo}(z) = \frac{3Ne g_0}{8\pi\epsilon_0\gamma^2 l^3} z \quad . \quad (I-12)$$

Lorsque la force de charge d'espace reste faible par rapport à la force de rappel synchrotrique (équation 1), les particules effectuent des oscillations harmoniques

$$\ddot{z} + \Omega_s^2 z = 0 \quad , \quad (I-13)$$

à la fréquence déviée

$$\Omega_s = \Omega_{so} - \Delta\Omega_{sc} \quad ; \quad \Delta\Omega_{sc} \ll \Omega_{so} \quad , \quad (I-14)$$

où la déviation $\Delta\Omega_{sc}$, obtenue en reportant (12) dans (1), a pour expression 10)

$$\Delta\Omega_{sc} = - \frac{3nNe^2 g_o}{16\pi\epsilon_o \gamma^3 m_o \ell^3 \Omega_{so}} \quad (I-15)$$

b) densité gaussienne

Cette forme de densité (Tableau 1) engendre un champ de charge d'espace (9) non linéaire, pour lequel l'équation (1) du mouvement devient

$$\ddot{z} + \Omega_{so}^2 z = 2\Omega_{so} \Delta\Omega_{sc} z e^{-z^2/2\sigma_z^2} \quad , \quad (I-16)$$

où

$$\Delta\Omega_{sc} = - \frac{nNe^2 g_o}{8\pi\sqrt{2}\pi\epsilon_o \gamma^3 m_o \Omega_{so} \sigma_z^3}$$

est la déviation de fréquence synchrotrique à la limite d'une amplitude d'oscillation nulle. A l'ordre $\Delta\Omega_{sc}$ (faible intensité de charge d'espace), l'équation (16) peut se ramener à celle d'un oscillateur dont la fréquence dépend de l'amplitude r_z (Appendice A), soit

$$\ddot{z} + \Omega_s^2(r_z) z = 0 \quad ,$$

$$\Omega_s(r_z) = \Omega_{so} - \Delta\Omega_{sc} G(r_z) \quad ,$$

avec

$$G(r_z) = e^{-r_z^2/2} (I_0(r_z^2/2) - I_1(r_z^2/2)) \quad , \quad (I-17)$$

I_0, I_1 : fonctions de Bessel modifiées et $r = r_z/\sigma$

A la différence du faisceau parabolique, les particules à densité gaussienne ne subissent pas toutes la même déviation $\Delta\Omega_{sc}$. La dispersion des déviations $\Delta\Omega_{sc} G(r_z)$ en fonction de l'amplitude

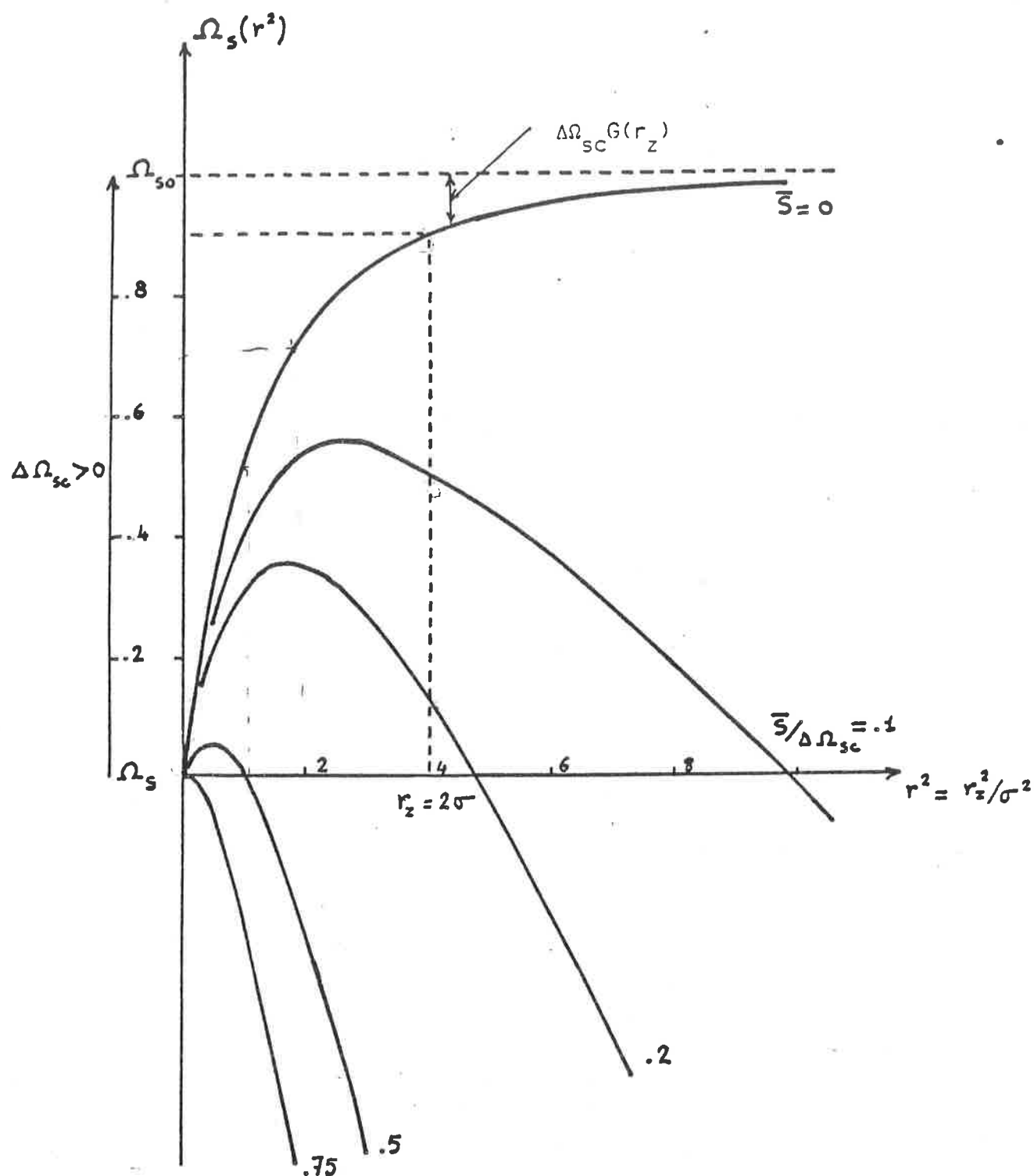


Fig. 3 - Dispersion des fréquences synchrotroniques du faisceau gaussien en fonction de r^2 . Pour $\bar{S} = 0$, (dispersion synchrotronique nulle) la dispersion $\Omega_s(r)$ est due à la charge d'espace non linéaire. Pour une faible dispersion $0 < \bar{S}/\Delta\Omega_{sc} < 3/4$, la fréquence synchrotronique est maximale pour des particules d'amplitude finie et non nulle. Pour $\bar{S}/\Delta\Omega_{sc} = 3/4$, cette fréquence maximale, égale à Ω_s , caractérise les particules au centre du faisceau.

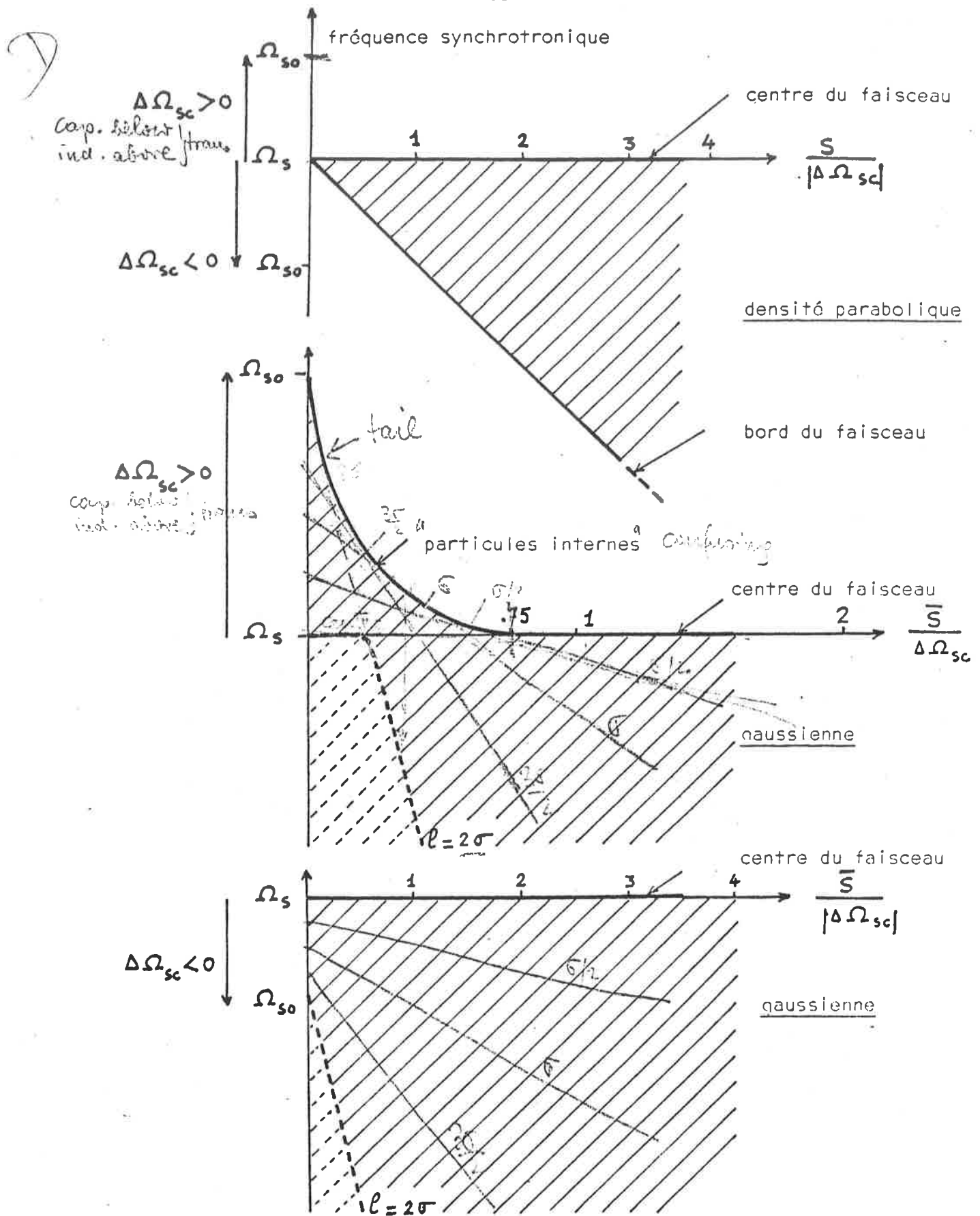


Fig. 4 - Variation de la largeur de bande des fréquences incohérentes en fonction de la dispersion synchrotronique

r_z est représentée par la courbe $\bar{S} = 0$ de la Figure 3. $\Delta\Omega_{sc}$ étant la déviation de fréquence affectant le centre du faisceau, cette déviation se réduit à $\Delta\Omega_{sc}/2$ à l'amplitude moyenne $r_z = \sigma$, et n'est plus que de l'ordre de $\Delta\Omega_{sc}/10$ pour $r_z = 2\sigma$. Les particules ayant une grande amplitude d'oscillation ont donc une fréquence voisine de la fréquence non perturbée Ω_{so} . La déformation du puits de potentiel due à la charge d'espace gaussienne, très concentrée au centre du faisceau, affecte peu les particules appartenant au bord du faisceau. Lorsque l'on compare un faisceau gaussien avec un faisceau à densité parabolique de même longueur moyenne $2\sigma_z$ (expression (15) avec $\ell^2 = 5\sigma_z^2$), on trouve que la déviation $\Delta\Omega_{sc}$ de charge d'espace (16) est 3 fois plus grande que dans le cas parabolique pour les particules appartenant au centre $r_z = 0$ du faisceau gaussien, et 1,5 fois plus grande pour les particules d'amplitude moyenne $r_z = \sigma$.

I-1-3- Dispersion S des fréquences synchrotroniques

La force de rappel synchrotronique, qui a été linéarisée pour écrire l'équation (1) admet en fait une dépendance en

$$\sin\phi \approx \phi - \phi^3/6 + \dots \quad (I-18)$$

par rapport à l'élongation angulaire $\phi = 2\pi z/L$ d'une particule (Figure 1). La fréquence des oscillations synchrotroniques varie donc en fonction de l'amplitude r_ϕ comme le ferait un pendule pesant. Pour une force réduite aux deux premiers termes (18), la correction de fréquence en fonction de l'amplitude admet l'expression bien connue :

$$\Omega_s(r_\phi) = \Omega_{so} - \frac{\Omega_{so}}{16} r_\phi^2 \quad (I-19)$$

Désignant par S la dispersion des fréquences entre le centre $r_\phi = 0$ et le bord du faisceau $r_\phi = \delta\phi/2$, on a donc

$$S = \frac{\Omega_{so}}{16} \left(\frac{\delta\phi}{2} \right)^2, \quad (I-20)$$

soit, en fonction du facteur de groupement $B = \delta\phi/2\pi$:

$$\frac{S}{\Omega_{so}} = \pi^2 B^2 / 16 \quad (I-21)$$

Une expression plus précise que (21) vis à vis des valeurs mesurées de Ω_s s'écrit ¹¹⁾

$$\frac{S}{\Omega_{so}} = \frac{2}{3} \frac{1 + \Gamma^2}{1 - \Gamma^2} B^2 \quad (I-22)$$

avec

$$\Gamma = \sin \phi_s$$

Ces deux dernières expressions sont en fait très proches l'une de l'autre pour un faisceau stationnaire ($\Gamma = 0$).

Le Tableau 2 reproduit, d'après la référence [11], les valeurs calculées de la déviation $\Delta\Omega_{sc}$ de charge d'espace (expression (15)) et de la dispersion S des fréquences synchrotroniques (22), pour trois valeurs de l'énergie d'un faisceau à densité parabolique dans le booster.

$E(\text{GeV})$	g_0	$B = \frac{2\ell}{L}$	$\frac{\Omega_{so}}{2\pi} \text{ (Hz)}$	$\frac{\Delta\Omega_{sc}}{\Omega_{so}}$	$\frac{S}{4\Omega_{so}}$
0,05	2,3	0,78	5470	0,041	0,102
0,45	3,5	0,51	3190	0,113	0,044
0,80	3,9	0,41	2200	0,150	0,028

Tableau 2 : Déviation de fréquence $\Delta\Omega_{sc}$ (15) et dispersion S (22) des fréquences pour les paramètres fixes : $N = 0,5 \cdot 10^{12}$ protons/paquet ($2,5 \cdot 10^{12}$ protons/anneau), $\Gamma = \sin \phi_s = 0,086$, $L = 31,4$ m.

Récapitulant la déviation de charge d'espace $\Delta\Omega_{sc}$ (15,16) et la dispersion S (22) des fréquences synchrotroniques, on écrit

$$\left. \begin{aligned} \Omega_s(r) &= \Omega_{so} - \Delta\Omega_{sc} - Sr^2, & r &= r_z/\ell \text{ (cas parabolique)} \\ \Omega_s(r) &= \Omega_{so} - \Delta\Omega_{sc} G(r) - \bar{S}r^2, & r &= r_z/\sigma \text{ (cas gaussien)}, \end{aligned} \right\} \quad (I-23) \quad (23)$$

S : dispersion des fréquences entre le centre et le bord du faisceau parabolique.

$\bar{S}$: dispersion des fréquences entre le centre et l'amplitude moyenne σ du faisceau gaussien.

Avec la convention de signe déterminée par $\Delta\Omega_{sc} = \Omega_{so} - \Omega_s(r=0)$, la déviation de fréquence due à la charge d'espace gaussienne et la dispersion synchrotronique $\bar{S}$ se retranchent pour $\Delta\Omega_{sc} > 0$. Ainsi, pour une faible dispersion $\bar{S}/\Delta\Omega_{sc} < 3/4$, les fréquences $\Omega_s(r)$ (23) du faisceau gaussien présentent un maximum qui est atteint par des particules dont l'amplitude varie entre le centre et le bord du faisceau (Figure 3). La variation de la largeur de bande des fréquences incohérentes, en fonction de la dispersion $\bar{S}$ (Figure 4), est donc plus complexe que la variation simplement linéaire caractérisant le faisceau à densité parabolique.

Remarque. Les grandeurs $\Delta\Omega_{sc}$ (15 et 16) et S (22) étant maintenant définies en unités M.K.S.A., nous utiliserons désormais les variables z , $\dot{z}/\Omega_{so}$, r et les densités non dimensionnées du Tableau 1.

I-1-4- L'interaction en fonction du nombre d'ondes de la densité perturbée

La force de charge d'espace stationnaire étant maintenant incluse dans la déviation des fréquences synchrotroniques comme en (23), il reste à rétablir l'interaction due à une perturbation de densité λ_1 dépendant du temps :

$$\lambda(z,t) = \lambda_0(z) + \lambda_1(z,t) \quad (I-24)$$

au second membre de l'équation (17) des oscillations synchrotroniques :

$$\ddot{z} + \Omega_s^2(r)z = 2\Omega_{so}\Delta\Omega_{sc} F_1(z,t) ,$$

$$F_1(z,t) = -\frac{1}{\alpha} \frac{\partial \lambda_1}{\partial z}(z,t) , \quad \alpha = \left| \frac{d^2 \lambda_0}{dz^2} \right|_{z=0} \quad (I-25)$$

(La constante α s'introduit pour respecter la normalisation des densités du Tableau 1). Pour une interaction de type charge d'espace on a plus généralement

$$F_1(z,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(z-z')\lambda_1(z',t)dz' , \quad (I-26)$$

où $K(z-z')$ est la réponse en z à une perturbation de charge unité en z' . Pour ce produit de convolution il est commode d'introduire les transformées de Fourier qui vérifient la relation

$$\hat{F}_1(k, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(z, t) e^{ikz} dz = 2\pi \hat{K}(k) \hat{\chi}_1(k, t) \quad (I-27)$$

Caractérisant une oscillation cohérente de densité par son nombre d'ondes spatiales $\frac{k}{\pi}$ (sur la longueur totale 2ℓ du faisceau, $\frac{k}{2\pi}$ sur la demi-longueur ℓ), le terme $\hat{K}(k)$ détermine donc selon (27) l'intensité de l'interaction en fonction du nombre k . Pour l'interaction longitudinale $F_1 \propto \frac{\partial \lambda}{\partial z}$ (25) on obtient :

$$\frac{\hat{K}(k)}{k} = \frac{1}{2\pi\alpha} = \text{constante} \quad , \quad (I-28)$$

et ce terme peut être relié à une impédance longitudinale ¹²⁾ de charge d'espace purement réactive, qui vérifie une relation analogue à (28). La réponse $K(z-z')$ est dans ce cas la dérivée d'une fonction delta, $\delta(z-z')$, et caractérise une interaction de charge d'espace à très faible rayon d'action. D'une manière générale, la réciprocité entre l'action en z et la réaction en z' dans (26), pour une inversion de la charge entre z' et z , détermine les propriétés

$$\begin{aligned} K(z-z') &= -K(z'-z) \\ \hat{K}(-k) &= \hat{K}^*(k) = -\hat{K}(k) \end{aligned} \quad (I-29)$$

(*) : grandeur complexe conjuguée.

I-2- Equation des petites oscillations collectives du faisceau

Hereward ¹³⁾ a étudié directement la stabilité d'un mode collectif (mode dipolaire) à l'aide de l'équation (25) des oscillations individuelles des particules, en ne retenant de l'interaction que la composante qui excite le mode envisagé. Toutefois la recherche d'un système complet de modes nécessite plus généralement la résolution d'une équation de Vlasov pour la fonction de distribution des particules $f(z, \dot{z}, t)$ dans le plan de phase :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial \dot{z}} \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial \dot{z}} = 0 \quad , \quad (I-30)$$

où $H(z, \dot{z}, t)$ est l'hamiltonien des oscillations individuelles d'équation (25). ~~X~~

I-2-1- L'équation de Vlasov linéarisée

Nous utilisons ici la propriété des variables θ, r d'être reliées aux variables d'angle et d'action α, J (Appendice A), soit

$$J = \Omega_{so} \frac{r^2}{2}, \quad \alpha = \frac{\pi}{2} - \theta, \quad (I-31)$$

et pour lesquelles l'équation de Vlasov (30) s'écrit

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial J} \frac{\partial f}{\partial \alpha} - \frac{\partial H}{\partial \alpha} \frac{\partial f}{\partial J} = 0 \quad (I-32)$$

L'hamiltonien des oscillations d'équation (25) est de la forme

$$H(J, \alpha) = H_0(J) + H_1(J, \alpha, t)$$

avec

$$2\Omega_{so} \Delta\Omega_{sc} F_1(z, t) = - \frac{\partial H_1}{\partial z} \quad (I-33)$$

et

$$\Omega_s(J) = \frac{dH_0}{dJ} \quad (\text{propriété de la variable d'action}).$$

Linéarisant l'équation (32) par rapport à une oscillation de densité voisine d'une distribution stationnaire :

$$f(J, \alpha, t) = f_0(J, \alpha) + f_1(J, \alpha, t), \quad (I-34)$$

on obtient :

- pour la distribution stationnaire, une propriété déjà exprimée en (2) :

$$\Omega_s(J) \frac{\partial f_0}{\partial \alpha} = 0, \quad f_0 = f_0(J) = f_0(r), \quad (I-35)$$

- pour la perturbation f_1 dépendant du temps

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \Omega_s(J) \frac{\partial f_1}{\partial \alpha} - \frac{\partial H_1}{\partial \alpha} \frac{df_0}{dJ} = 0 \quad (I-36)$$

Revenant aux variables r, θ , cette dernière équation s'écrit :

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} - \Omega_s(r) \frac{\partial f_1}{\partial \theta} + 2\Delta\Omega_{sc} \sin\theta F_1(r \cos\theta, t) \frac{df_0}{dr} = 0 \quad (I-37)$$

où la dispersion $\Omega_s(r)$ est donnée par (23).

I-2-2- Description des modes collectifs

A la limite d'une intensité de charge d'espace nulle ($\Delta\Omega_{sc} = 0$) et pour une force synchrotrique linéaire ($S = 0$), les particules décrivent des trajectoires circulaires dans le plan de phase $z, \dot{z}/\Omega_{so}$. Toute distribution initiale tourne donc rigidement autour de l'origine du plan de phase. L'équation de Vlasov (37), réduite à

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} - \Omega_{so} \frac{\partial f_1}{\partial \theta} = 0 \quad (I-38)$$

admet une double infinité de solutions sous la forme de modes propres, repérés par les indices m et n :

$$f_{mn}(r, \theta, t) = g_{mn}(r) e^{-in\theta} e^{-i\omega_{mn}t} \quad (I-39)$$

Les fréquences propres de la perturbation

$$\omega_{mn} = n\Omega_{so} \quad (I-40)$$

sont uniquement déterminées par la symétrie d'ordre harmonique n dans une rotation du mode (Figures 5a et 5b), indépendamment de leur variation radiale (indiquée m) $g_{mn}(r)$. Prenant l'exemple du mode dipolaire $n = 1$, la Figure 6 représente une oscillation rigide de la distribution déplacée de l'origine, avec oscillation de son barycentre et, parmi une

D

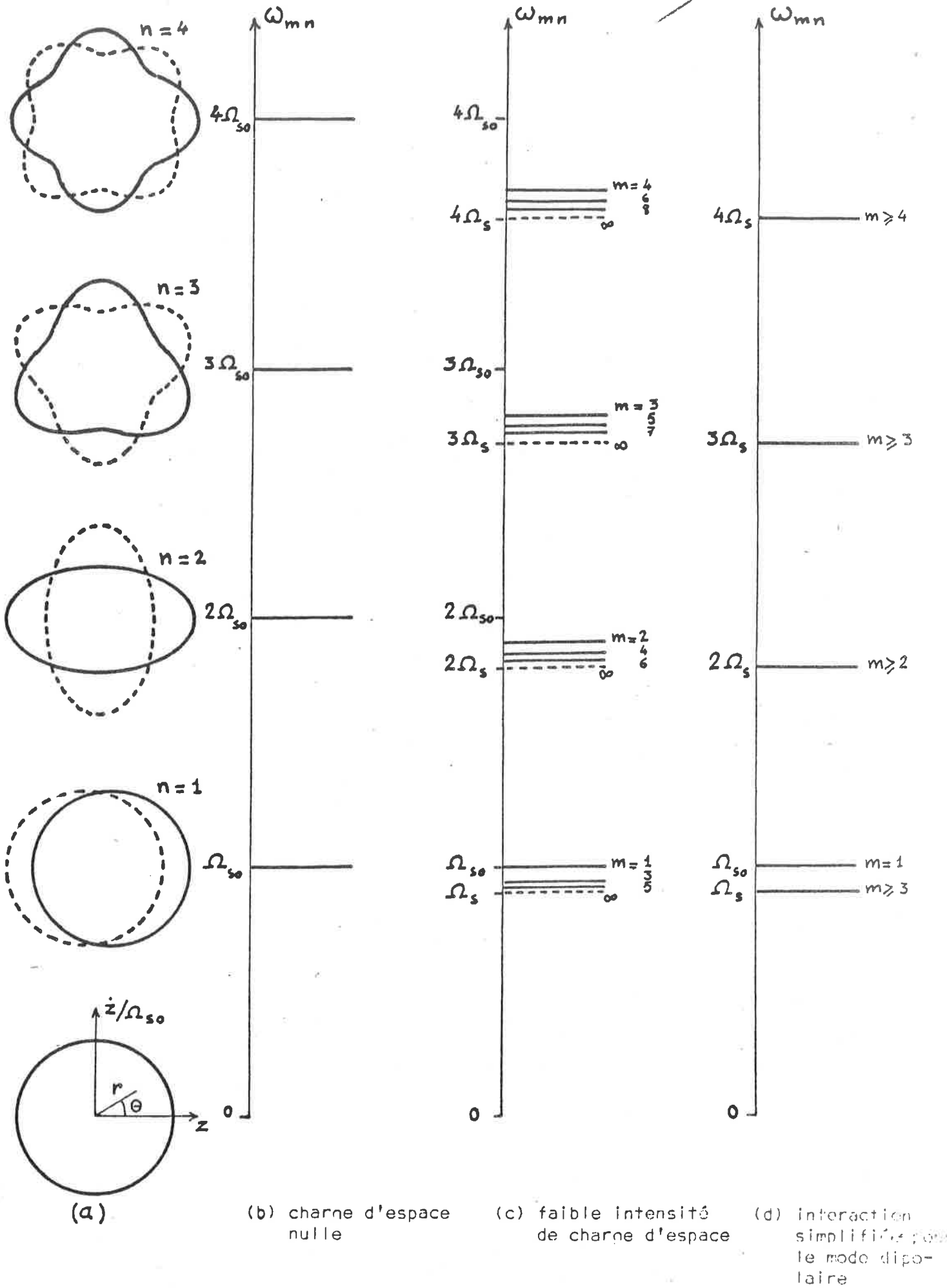


Fig. 5 - Représentation des modes dans le plan de phase $z, \dot{z}/\Omega_{s0}$ (a) et spectres des fréquences propres ω_{mn} avec et sans charge d'espace

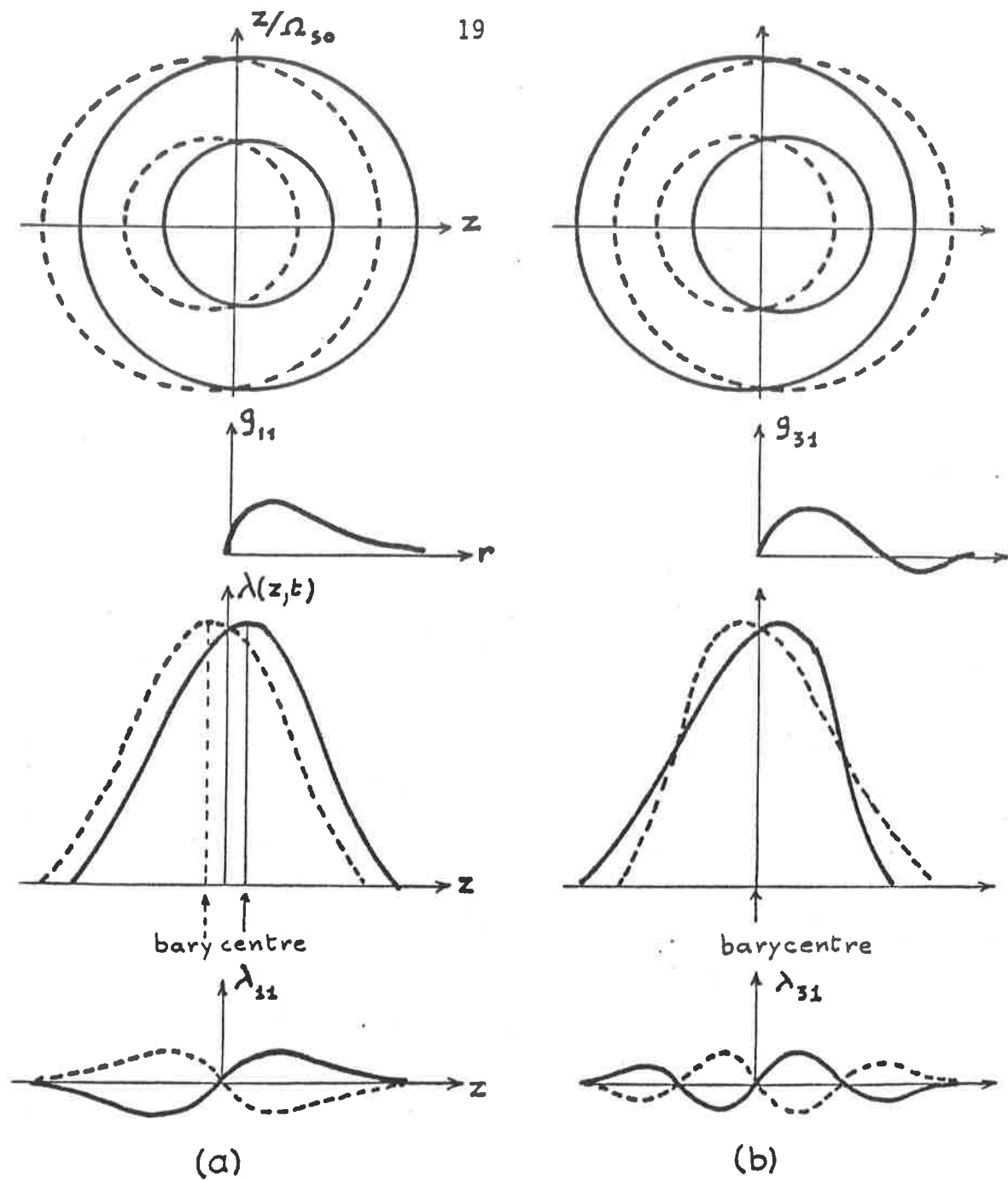


Fig. 6 - Mode dipolaire rigide (a) et exemple de mode dipolaire non rigide (b)

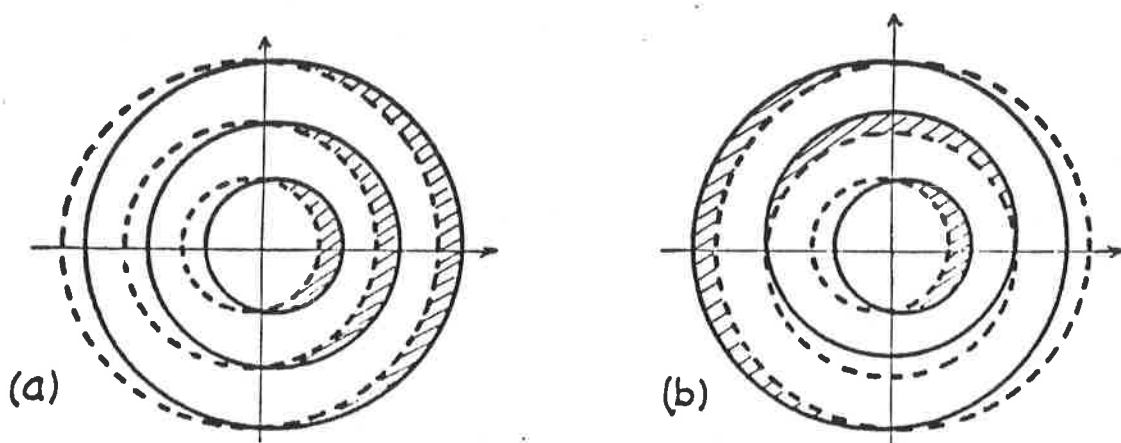


Fig. 7 - Filamentation d'une distribution initiale (a) due à la rotation différentielle (b) dans le plan de phase (effet d'une force non linéaire)

infinité d'autres modes dipolaires, un mode où le centre et le bord du faisceau oscillent en opposition de phase, sans déplacement du barycentre. Ces deux modes diffèrent par leur variation radiale $g_{m1}(r)$ et, plus typiquement, par le nombre d'oscillations spatiales de la densité $\lambda_1(z,t)$. Alors qu'en l'absence de force de charge d'espace ces deux modes oscillent à la même fréquence Ω_{so} , l'action de cette force, qui est fonction du nombre d'ondes de la densité comme en (27-28), dissocie les deux fréquences propres. Pour une faible intensité de charge d'espace ($\Delta\Omega_{sc}/\Omega_{so} \ll 1$), les fréquences propres ω_{mn} sont différemment déviées au voisinage des harmoniques $n\Omega_{so}$ comme indiqué sur la Figure 5c.

En présence d'une dispersion $\Omega_s(r)$ des fréquences synchrotroniques par une force non linéaire, et pour une interaction nulle, l'évolution dans le temps d'une perturbation initiale reste un problème simple. En effet les particules d'amplitude r transportent la valeur locale de la densité du plan de phase à une même fréquence $\Omega_s(r)$, soit, pour une perturbation initiale d'ordre n :

$$f(r,\theta,t) = f(r,\theta,t=0)e^{-in\Omega_s(r)t} \quad (I-41)$$

La dispersion des fréquences $\Omega_s(r)$ produit une rotation différentielle de la distribution initiale du plan de phase (Figure 7), ce qui a pour effet la filamentation de cette distribution. En présence d'interactions, le champ de charge d'espace exerce un couplage entre l'oscillation collective et les oscillations synchrotroniques. Lorsque la fréquence collective se situe en dehors de la bande des fréquences incohérentes, ce couplage est faible et le caractère discret des fréquences propres est conservé. Lorsqu'au contraire la fréquence collective est dans la bande des fréquences incohérentes, les particules dont la fréquence d'oscillation est voisine de celle du mode sont forcées à la résonance. Un échange d'énergie entre des oscillateurs incohérents et leur champ électrique propre est analogue à l'interaction onde-électrons dans un plasma, et donne lieu à l'amortissement de Landau ⁵⁾ du mode collectif. Dans ce cas il n'est plus possible de décrire un mode collectif à l'aide d'une fonction propre continue telle que (39), et une fréquence propre ω_{mn}

discrète. Une perturbation initiale évolue dans le temps en fonction d'un spectre continu de fréquences, dont la largeur donne le taux d'amortissement, et auquel correspond un système de modes discontinus, ou modes de Van-Kampen ⁶⁾.

I-3- Les approximations usuelles de la théorie de la stabilité d'un mode collectif. Exemple du mode dipolaire

I-3-1- Simplification de l'interaction

Considérons les approximations qui résultent de la simplification suivante du terme d'interaction $K(z-z')$ dans (26) :

$$K(z-z') \approx z-z' \quad (+ \text{ termes négligés}) \quad (\text{I-42})$$

Compte tenu de la normalisation des densités (Tableau 1) la force d'interaction (26) devient

$$F_0(z) + F_1(z,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (z-z')(\lambda_0(z') + \lambda_1(z',t)) dz' = z-\bar{z}(t) \quad (\text{I-43})$$

où

$$\bar{z}(t) = \iint_{-\infty}^{+\infty} z f_1(z, \dot{z}, t) dz d\dot{z} = \int_{-\infty}^{+\infty} z \lambda_1(z, t) dz \quad (\text{I-44})$$

est le barycentre de la distribution. La simplification (42) a donc pour effet :

- de linéariser la force stationnaire de charge d'espace $F_0(z) = z$, quelle que soit la forme de la distribution stationnaire.

- de ne retenir que l'interaction de type dipolaire dépendant de la position du barycentre, sans tenir compte des détails de la densité perturbée, puisque $F_1 = -\bar{z}(t)$ est indépendant de z .

- Remarquons que cette simplification donne une bonne approximation d'un faisceau à densité parabolique déplacé de l'origine, pour lequel on a approximativement

$$\lambda(z,t) = \lambda_0(z - \bar{z}(t)) = \lambda_0(z) - \bar{z}(t) \frac{d\lambda_0}{dz} \quad (I-45)$$

Dérivant cette expression par rapport à z pour obtenir la force (25) on retrouve précisément le résultat (43).

Pour la force simplifiée (43) l'équation d'oscillation de la particule " z_i " s'écrit

$$\ddot{z}_i + \Omega_s^2 z_i = -2\Omega_{so} \Delta\Omega_{sc} \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N z_k \right) = -2\Omega_{so} \Delta\Omega_{sc} \bar{z}(t) \quad , \quad (I-46)$$

et, effectuant une somme sur l'ensemble des particules, la fréquence propre du mode dipolaire rigide $m = n = 1$ s'en déduit comme étant égale à la fréquence synchrotronique non perturbée, quelle que soit l'intensité de la charge d'espace :

$$\omega_{11} = \Omega_s + \Delta\Omega_{sc} = \Omega_{so} \quad , \quad S = 0 \quad (I-47)$$

La Figure 5d représente la simplification introduite dans le spectre des fréquences propres ω_{mn} .

I-3-2- Relation de dispersion

Cherchant une solution au mode dipolaire de la forme

$$f_1(r, \theta, t) = g(r) e^{-i\theta} e^{-i\omega t} \quad ,$$

$$\bar{z}(t) = \bar{z}_0 e^{-i\omega t} \quad , \quad (I-48)$$

l'équation de Vlasov (37) devient

$$i(\omega - \Omega_s(r)) g(r) e^{-i\theta} + 2\Delta\Omega_{sc} \bar{z}_0 \sin\theta \frac{df_0}{dr} = 0 \quad (I-49)$$

Multipliant cette équation par $e^{i\theta}$ et intégrant sur les phases θ la solution s'écrit

$$g(r) = -\bar{z}_0 \Delta\Omega_{sc} \frac{\frac{df_0}{dr}}{\omega - \Omega_s(r)} \quad (I-50)$$

Reportée dans la définition (44) du barycentre, cette solution conduit à une relation de dispersion ³⁾ pour la fréquence ω du mode collectif :

$$1 = -\pi \Omega_{so} \Delta \Omega_{sc} \int_0^{\infty} \frac{r^2 \frac{df_0}{dr} dr}{\omega - \Omega_s(r)}, \quad (I-51)$$

$$\Omega_s(r) = \Omega_s - S r^2$$

Pour une dispersion S nulle, cette équation redonne bien la fréquence propre (47) du mode dipolaire rigide.

I-3-3- Diagrammes de stabilité

Lorsqu'une fréquence collective ω réelle est située dans la bande des fréquences incohérentes $\Omega_s(r)$, l'intégrale de dispersion (51) est singulière, comme l'est également la solution $g(r)$ (50). Il faut alors recourir au traitement de Landau ⁵⁾ du problème à valeur initiale (à l'aide d'une transformation de Laplace), prescrivant que la partie imaginaire de ω doit s'annuler par valeur positive pour les temps positifs. Cette condition détermine la déformation du chemin d'intégration qui évite la singularité et attribue une valeur complexe à l'intégrale de dispersion. 2.

a) Seuil de stabilité dans le plan des fréquences complexes U, V .

Sous l'action de la charge d'espace stationnaire, une impédance de paroi nulle (9) ou purement réactive (11) contribue à une déviation $\Delta \Omega_{sc}$ réelle des fréquences synchrotroniques (15-16). La conductivité finie d'une paroi réelle est généralement prise en compte par une impédance (proportionnelle au terme d'interaction $\tilde{K}(k)$) présentant une partie résistive et une partie inductive égales ¹²⁾ (effet de peau). Cela équivaut à introduire dans l'équation (46) une composante de force d'interaction déphasée par rapport à l'oscillation collective :

$$\ddot{z}_1 + \Omega_s^2 z_1 = -2\Omega_{so} (\Delta \Omega_{sc} + v + iv) \bar{z}(t) \quad (I-52)$$

La fréquence propre (47) admet alors une déviation complexe

$$\omega_{11} = \Omega_s + \Delta \Omega_{sc} + v + iv = \Omega_{so} + v + iv, \quad S = 0, \quad (I-53)$$

et l'oscillation collective ($\propto e^{-i\omega t}$) devient instable pour $v > 0$. Récrivant l'équation de dispersion (51) sous la forme

$$U + iV = \left(-\pi\Omega_{so} \int_0^\infty \frac{r^2 \frac{df_0}{dr} dr}{\frac{\Delta\omega}{S} + r^2} \right)^{-1} \quad (I-54)$$

$$U + iV = \frac{\Delta\Omega_{sc} + v + iV}{S}, \quad \Delta\omega = \omega - \Omega_s$$

une représentation graphique de l'effet de dispersion consiste à projeter les droites $\text{Im} \frac{\Delta\omega}{S} = \text{constante}$ dans le plan complexe U, V ^{14,15}). En particulier la projection de la droite $\text{Im}\Delta\omega = +0$ donne la limite de stabilité du mode collectif dans ce plan. Cette limite, qui pour une dispersion nulle (53) est confondue avec l'axe $V = 0$, est maintenant déviée dans le demi-plan instable $V > 0$, agrandissant ainsi le domaine de stabilité du mode. Les seuils de stabilité des modes dipolaires parabolique et gaussien (Figure 8) sont calculés à l'Appendice B.

b) Diagramme de variation de la fréquence collective $\text{Re}(\omega)$ en fonction de la dispersion S . Souvent l'interaction de charge d'espace ou l'effet de paroi inductive sont dominants par rapport à l'effet de résistivité, si bien que la fréquence ω du mode dipolaire, donnée par (54), est pratiquement réelle, et a pu être mesurée ¹⁶⁻¹⁷). Dans cette approximation, la partie réelle de cette fréquence, figurant en tant que paramètre sur la Figure 8, est reportée sur la Figure 9 en fonction de la dispersion synchrotronique S , pour une déviation $\Delta\Omega_{sc}$ positive (avant la transition) et négative (après la transition). L'amortissement de Landau s'exerçant lorsque la fréquence collective ω entre dans la bande des fréquences incohérentes, le seuil de stabilité avant transition s'obtient aisément en résolvant l'équation (54) pour $\Delta\omega = 0$, et s'exprime en fonction de la densité au centre du faisceau par :

$$(S/\Delta\Omega_{sc})_{\text{seuil}} = \pi\Omega_{so} f_0(r=0) \quad (I-55)$$

La stabilité des faisceaux à densité parabolique et gaussienne est obtenue

Continuum
Excitation

nue pour une dispersion synchrotronique S et une déviation de charge d'espace $\Delta\Omega_{sc}$ telles que :

$$\begin{array}{l} \Delta\Omega_{sc} > 0 \\ \text{(avant la} \\ \text{transition)} \end{array} \left\{ \begin{array}{ll} \bar{S}/\Delta\Omega_{sc} > \pi\Omega_{so}f_0(r=0) = 1, & \text{faisceau gaussien} \\ S/\Delta\Omega_{sc} > \pi\Omega_{so}f_0(r=0) = 3/2, & \text{faisceau parabolique} \end{array} \right. \quad (I-56)$$

$$\begin{array}{l} \Delta\Omega_{sc} < 0 \\ \text{(après la} \\ \text{transition)} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{faisceau gaussien toujours stable, ou} \\ \bar{S}/|\Delta\Omega_{sc}| \gtrsim 1/2 \text{ pour } \ell = 2\sigma \text{ (distribution tronquée)} \\ \text{faisceau parabolique toujours instable} \end{array} \right.$$

Rappelons les conditions et approximations qui conduisent à une relation de dispersion telle que (51) ou (54) pour l'oscillation collective :

- La force de charge d'espace et la composante non linéaire de force synchrotronique restent faibles par rapport à la force de rappel linéaire, soit en termes de fréquences :

$$S, \Delta\Omega_{sc} \ll \Omega_{so}$$

- Les variables d'amplitude r et de phase θ , définies à l'ordre zéro en $S, \Delta\Omega_{sc}$, sont des variables appropriées pour définir une distribution stationnaire $f_0(r)$ au même ordre, et pour calculer une oscillation de densité $f_1(r, \theta, t)$ à l'ordre $\Delta\Omega_{sc}, S$ (linéarisation de l'équation de Vlasov).

- Les modes qui, pour une interaction nulle, sont séparables par rapport à r et θ , conservent cette propriété pour une faible intensité de charge d'espace.

- Enfin l'interaction est simplifiée de manière à ne conserver que la composante de force qui excite le mode le plus cohérent d'ordre harmonique n : les déviations de fréquence $\Delta\omega_{mn}$ des modes d'ordre $m > n$ sont négligées (Figure 5d).

Notre propos est maintenant de réduire en partie cette dernière simplification, c'est-à-dire de tenir compte de l'existence des modes d'ordre $m > n$ lorsque l'on calcule la stabilité des modes les plus cohérents. Pour cela nous considérerons la forme locale exacte $E_z \propto - \frac{\partial \lambda}{\partial z}$ du champ de charge d'espace, au lieu de l'interaction moyenne qui ne dépend par exemple que du barycentre de la distribution. On considèrera comme précédemment une déviation de charge d'espace $\Delta \Omega_{sc}$ réelle, positive ou négative, caractérisant une impédance de paroi purement réactive, capacitive ou inductive. La dispersion des fréquences incohérentes due aux effets non linéaires de la charge d'espace, qui peut s'ajouter ou se retrancher ¹⁸⁻¹⁹⁾ à la dispersion synchrotronique S , sera prise en compte dans le cas du faisceau à densité gaussienne.

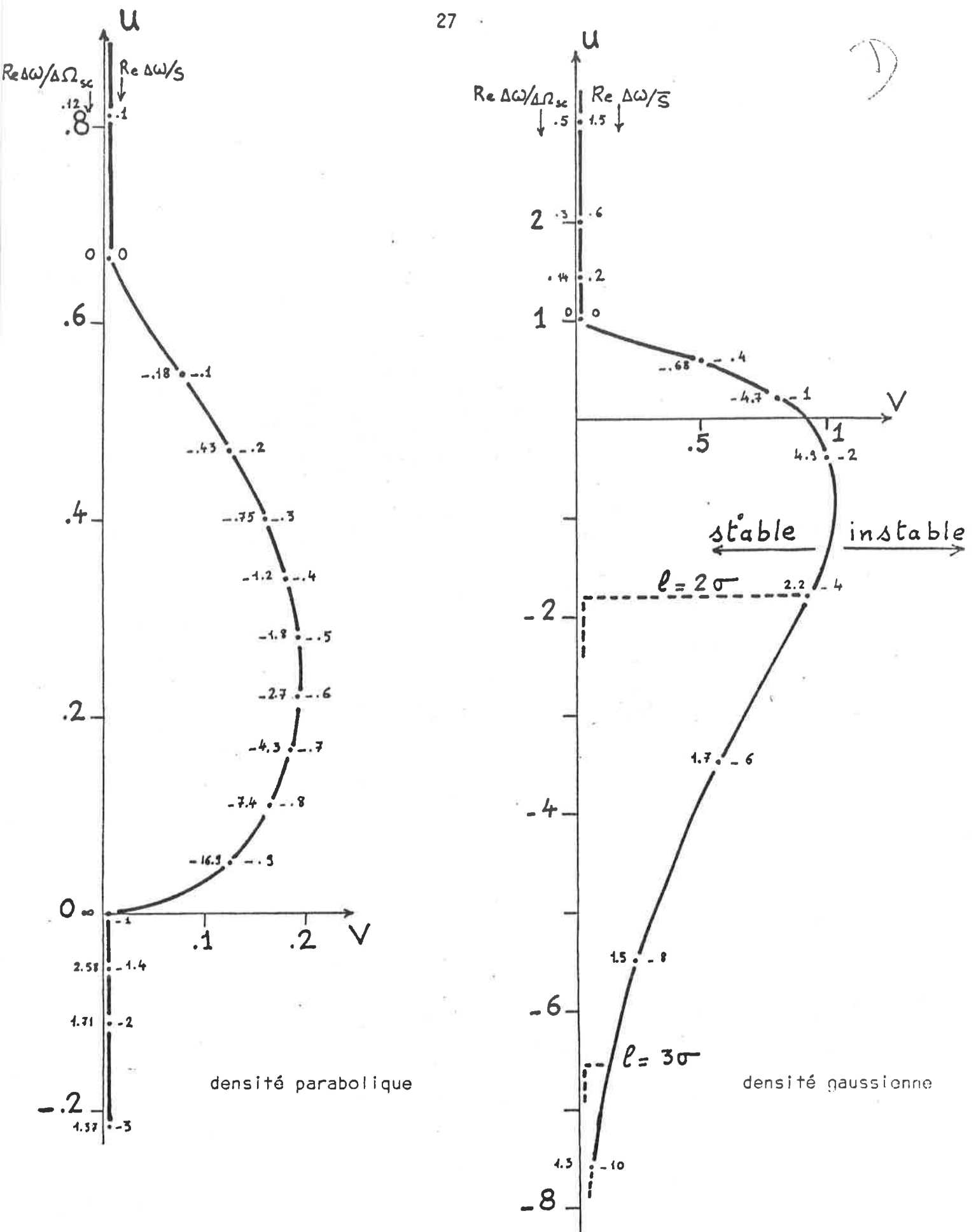


Fig. 8 - Seuils de stabilité $\text{Im } \omega = 0$ du mode dipolaire dans le plan U, V . On a indiqué en pointillés la réduction du domaine de stabilité pour une distribution gaussienne tronquée, de demi-longueur $\ell = 2\sigma$ et $\ell = 3\sigma$ (importance de "l'effet de bord" pour l'amortissement de Landau).

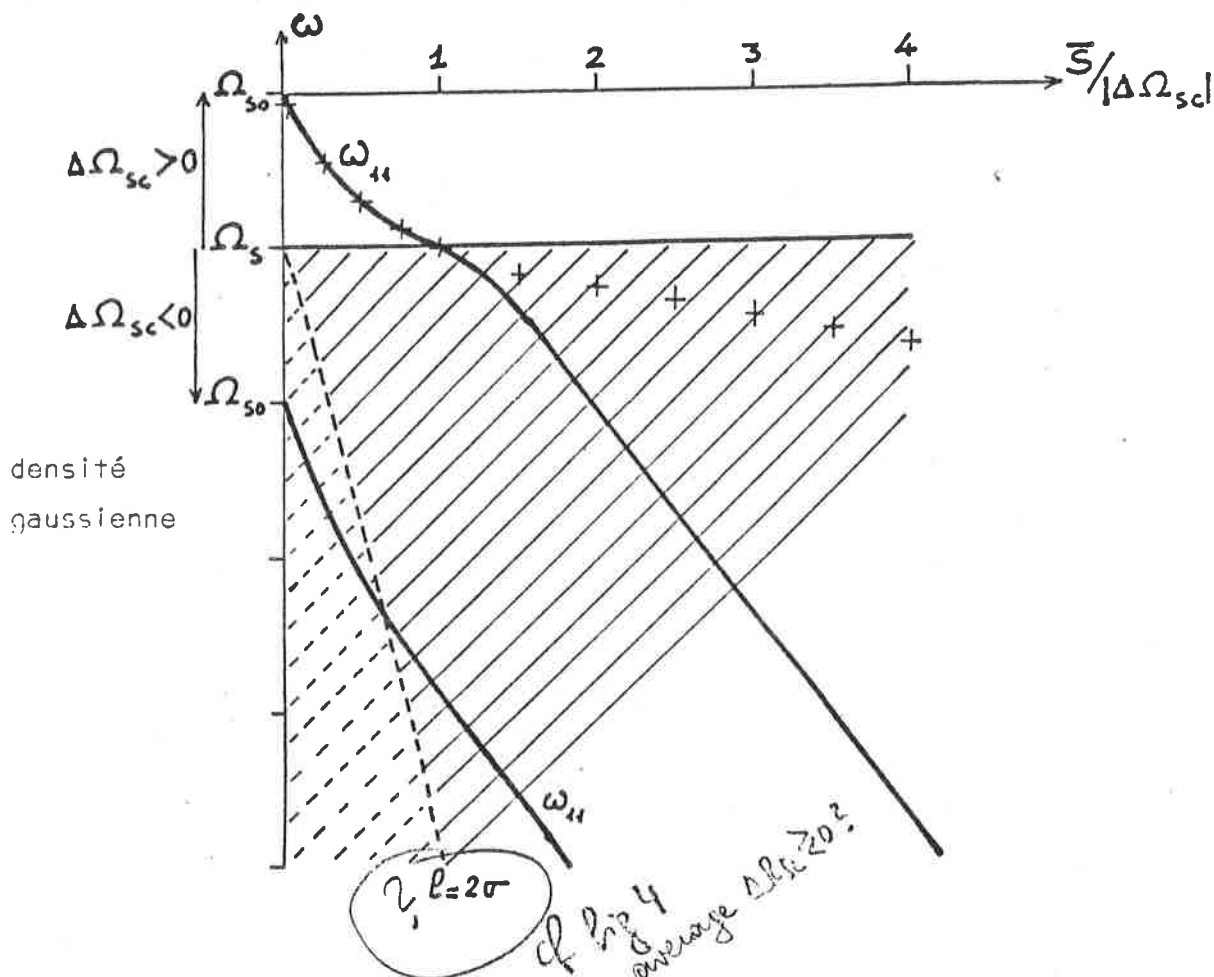
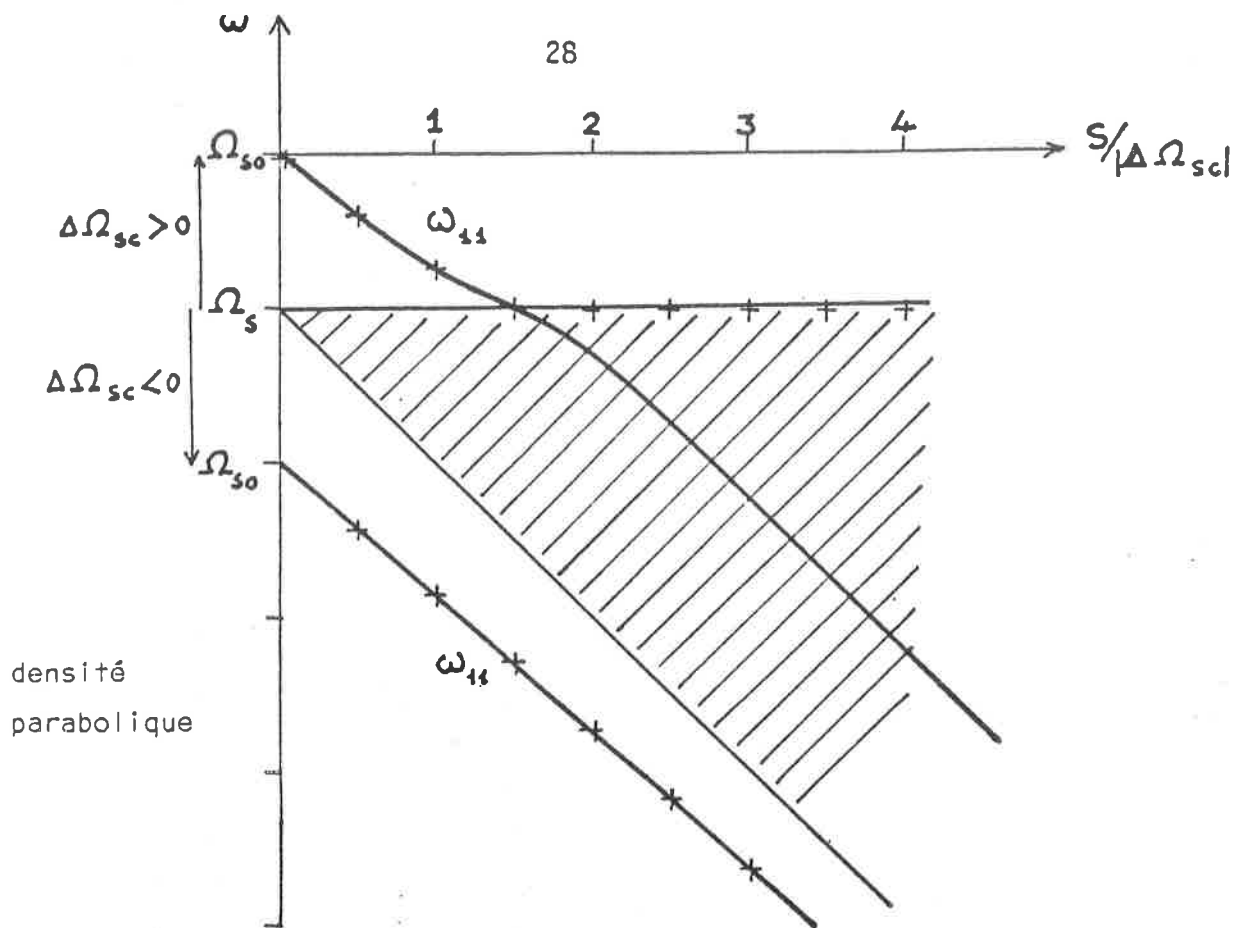


Fig. 9 - Variation de la fréquence ω_{11} réelle du mode dipolaire par rapport à la bande hachurée des fréquences incohérentes, pour l'interaction simplifiée (I-43)

———— calculée par la relation de dispersion (I-54)
 ++++++ calculée par une méthode de perturbation

II - SOLUTIONS DE L'EQUATION DE VLASOV DEVELOPPEES EN SERIE DE MODES NORMAUX

Nous nous proposons maintenant d'approcher les solutions de l'équation de Vlasov (I-37) pour l'interaction exacte (I-25 ou I-28). Pour cela nous utilisons une propriété générale d'orthogonalité des solutions de l'équation de Vlasov ³⁾. Malheureusement, en présence d'une dispersion $\Omega_s(r)$ des fréquences incohérentes, ces solutions ne peuvent pas, en général, être calculées sous la forme de fonctions régulières. L'analyse de Van-Kampen ⁶⁾ nous rappelle en effet que les solutions sous forme de modes normaux sont généralement des distributions. Nous nous limitons donc à appliquer une méthode de perturbation qui consiste à développer les solutions en séries de modes auxiliaires, continus, possédant la propriété d'orthogonalité des solutions exactes.

II-1- Rappel de propriétés générales des solutions

II-1-1- Equation intégrale pour les modes radiaux

Comme dans le cas d'une interaction nulle, nous recherchons les solutions de l'équation de Vlasov (I-37)

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} - \Omega_s(r) \frac{\partial f_1}{\partial \theta} + 2\Delta\Omega_{sc} \sin\theta F_1(r \cos\theta, t) \frac{df_0}{dr} = 0 \quad (\text{II-1})$$

sous une forme séparable par rapport aux variables d'amplitude r et de phase θ :

$$\begin{aligned} f_1(r, \theta, t) &= R(r) e^{-in\theta} e^{-i\omega t} , \\ \lambda_1(z, t) &= \lambda(z) e^{-i\omega t} , \\ F_1(r \cos\theta, t) &= F(r \cos\theta) e^{-i\omega t} , \end{aligned} \quad (\text{II-2})$$

ω étant la fréquence de l'oscillation collective. En fait ce dernier terme d'interaction $F(r \cos\theta)$ couple entre eux les modes caractérisés par des nombres harmoniques n différents, solutions de l'équation :

$$(\omega - n\Omega_s(r))R(r) = -2i\Delta\Omega_{sc} \frac{df_0}{dr} F(r \cos\theta) \sin\theta e^{in\theta} \quad (II-3)$$

Cependant, pour une faible intensité de charge d'espace, leur séparation en fréquence, de l'ordre de Ω_{so} , reste grande par rapport à l'étalement d'un spectre de même ordre n , qui est de l'ordre de la déviation $\Delta\Omega_{sc}$ (Figure 5c). Nous négligeons donc ce couplage, intégrons (3) par rapport à θ et introduisons l'expression de $F(z)$ tirée de (I-27)

$$F(z = r \cos\theta) = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{K}(k) \tilde{\lambda}(k) e^{-ikz} dk \quad (II-4)$$

On obtient :

$$(\omega - n\Omega_s(r))R(r) = -(-1)^{n+1} 4n\pi\Delta\Omega_{sc} \frac{1}{r} \frac{df_0}{dr} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{K}(k)}{k} \tilde{\lambda}(k) J_n(kr) dk \quad (II-5)$$

où l'on a utilisé la forme intégrale des fonctions de Bessel

$$J_n(kr) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(kr \cos\theta - n\theta)} d\theta \quad (II-6)$$

$\int_0^{2\pi} e^{i(n\theta - kr \cos\theta)} \sin\theta d\theta = -(-1)^n \frac{2\pi}{kr} J_n(kr)$

Appliquant la propriété des modes $R(r)$ d'être reliés aux modes de densité $\tilde{\lambda}(k)$ par une transformation intégrale de type Fourier-Bessel (Appendice C) :

$$R(r) = \frac{1}{i^n \Omega_{so}} \int_0^\infty \tilde{\lambda}(k) J_n(kr) k dk \quad (a)$$

(II-7)

$$\tilde{\lambda}(k) = i^n \Omega_{so} \int_0^\infty R(r) J_n(kr) r dr \quad (b)$$

on obtient l'équation intégrale de F. Sacherer²⁰⁾ sous la forme :

$$(\omega - n\Omega_s(r))R(r) = n\Delta\Omega_{sc} \frac{1}{r} \frac{df_0}{dr} \int_0^\infty G_n(r, r') R(r') r' dr' \quad (II-8)$$

avec
$$G_n(r, r') = 4i\pi\Omega_{so} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{K}(k)}{k} J_n(kr) J_n(kr') dk \quad (\text{II-9})$$

Pour l'interaction longitudinale (I-28) $\frac{\tilde{K}(k)}{k} = \text{constante}$, le noyau intégral $G_n(r, r')$ s'exprime ici à l'aide d'une intégrale du type Weber-Shafheitlin²¹⁾, qui est une fonction hypergéométrique de r/r' , donc discontinue en $r = r'$.

II-1-2- Modes normaux et adjoints de F. Sacherer^{3,22)}. Propriétés d'orthogonalité

Désignant par $f_{mn}(r)$ une solution de l'équation (8) associée à la fréquence propre ω_{mn} :

$$(\omega_{mn} - n\Omega_s(r)) f_{mn}(r) = n\Delta\Omega_{sc} \frac{1}{r} \frac{df_o}{dr} \int_0^\infty G_n(r, r') f_{mn}(r') r' dr' , \quad (\text{II-10})$$

et formant l'équation adjointe

$$(\omega_{ln}^+ - n\Omega_s(r)) f_{ln}^+(r) = n\Delta\Omega_{sc} \int_0^\infty G_n(r, r') \frac{1}{r'} \frac{df_o}{dr'} f_{ln}^+(r') r' dr' , \quad (\text{II-11})$$

l'orthogonalité des modes normaux et adjoints résulte de la symétrie du noyau $G_n(r, r')$ d'expression (9). Multipliant (10) par $f_{ln}^+(r)$, (11) par $f_{mn}(r)$, soustrayant les deux équations et intégrant par rapport à r , on obtient la relation d'orthogonalité suivante :

$$(\omega_{mn} - \omega_{ln}^+) \int_0^\infty f_{mn}(r) f_{ln}^+(r) r dr = 0 , \quad (\text{II-12})$$

où les modes normaux et adjoints sont reliés par

$$\begin{aligned} f_{mn}(r) &= \frac{1}{r} \frac{df_o}{dr} f_{mn}^+(r) \\ \omega_{mn} &= \omega_{mn}^+ \end{aligned} \quad (\text{II-13})$$

Comme nous l'avons signalé au début, la forme relativement compliquée du noyau intégral (9) et surtout la dispersion $\Omega_s(r)$ des fréquences synchrotroniques font que ces modes $f_{mn}(r)$ ne peuvent être directement calculés à partir de l'équation (8). En première approche, nous définissons un système de modes normaux auxiliaires $W(r)R_{mn}(r)$, vérifiant la propriété d'orthogonalité (12) avec les modes adjoints $R_{mn}(r)$ et normés par

$$\int_0^\infty W(r)R_{mn}(r)R_{\ell n}(r)rdr = \delta_{\ell m} \quad (\text{II-14})$$

$$W(r) = \frac{C}{r} \frac{df_0}{dr}, \quad C = \text{constante}$$

$$\delta_{\ell m} = 0 \text{ pour } \ell \neq m \quad \delta_{mm} = 1$$

Les expressions des modes radiaux $R_{mn}(r)$ que nous utiliserons sont rassemblées dans le Tableau 3, ainsi que les modes de densité correspondants $\lambda_{mn}(z)$, $\tilde{\lambda}_{mn}(k)$. Les modes paraboliques sous la forme de polynômes de Legendre ont été calculés par F. Sacherer²³⁾ comme étant les solutions exactes (cas d'une dispersion nulle) d'une autre équation intégrale pour la densité $\lambda(z)$. Les modes radiaux correspondants sont des polynômes de Jacobi. Dans le cas gaussien, les polynômes d'Hermite ont été utilisés par Grant et Feix²⁴⁾ pour décrire les petites oscillations d'un plasma. Des polynômes de Laguerre décrivent les modes radiaux correspondants. Dans tous les cas les modes d'ordre radial $m = n$ s'écrivent simplement :

$$W(r)R_{nn}(r)e^{-in\theta} = D_{nn}W(r)r^n e^{-in\theta}, \quad (\text{II-15})$$

et ont la propriété de décrire l'oscillation du moment d'ordre n de la distribution :

$$\overline{z^n}(t) = \Omega_{s0} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} z^n f_1(r, \theta, t) r dr d\theta = \int_0^\infty R(r)R_{nn}(r)rdr \quad (\text{II-16})$$

En vertu de l'orthogonalité des modes, seule la composante $W(r)R_{nn}(r)$

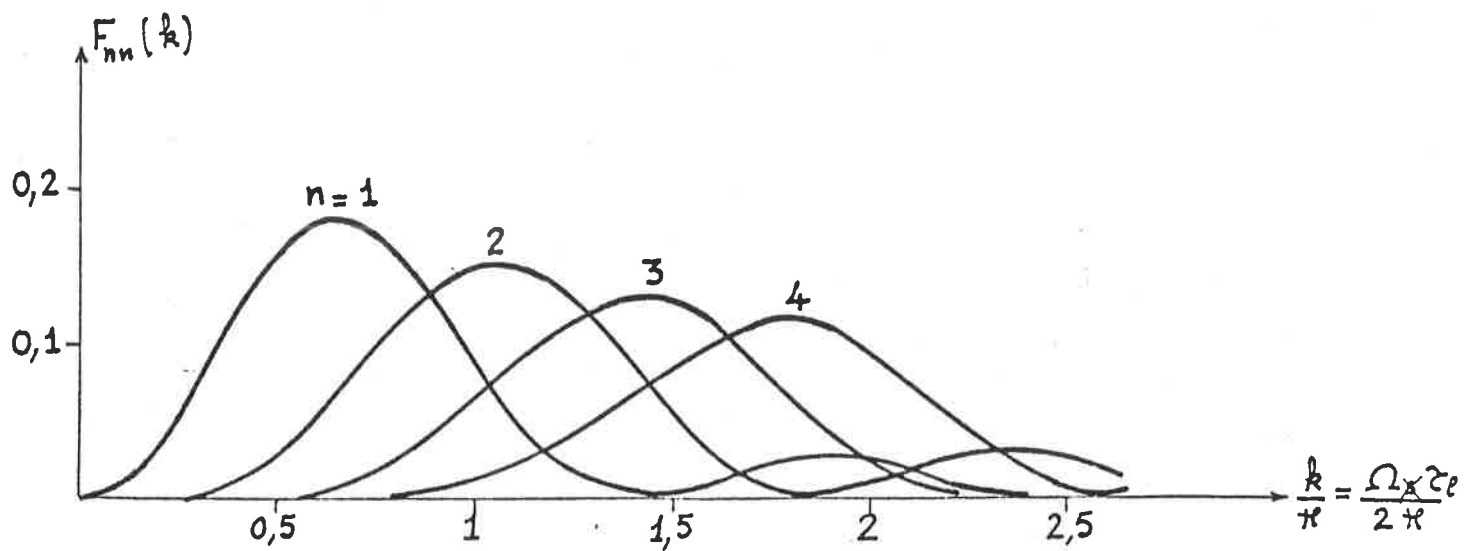
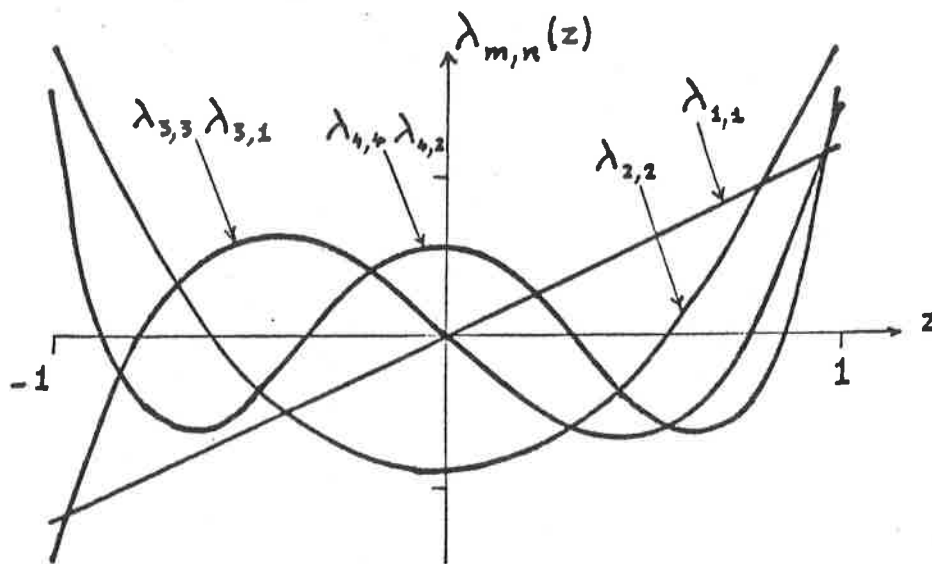
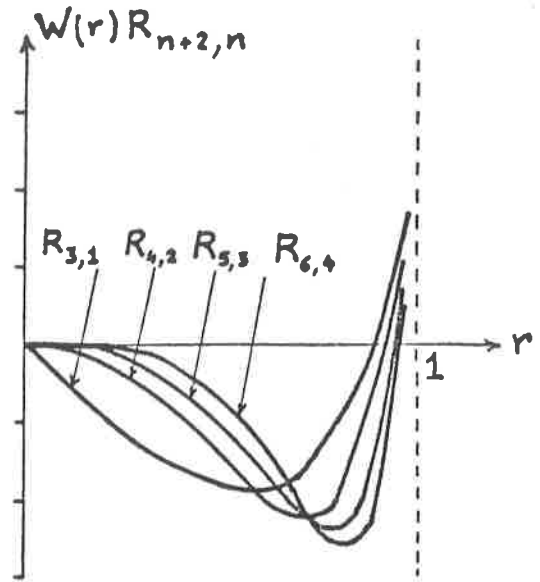
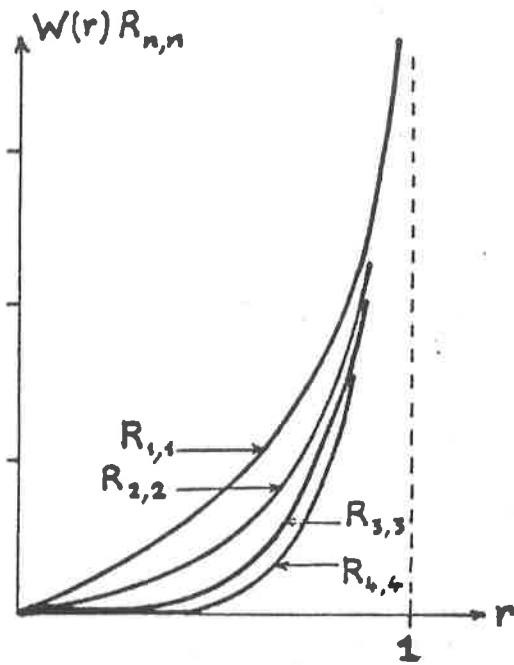


Fig. 10 - Modes radiaux $W(r)R_{nn}(r)$ et modes de densité $\lambda_{nn}(z)$ pour le faisceau à densité parabolique, normalisés par la relation (14). Le facteur de forme des modes $\tilde{\lambda}_{nn}(k)$ résulte de la normalisation $F_{nn}(k) = \frac{|\tilde{\lambda}_{nn}(k)|^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{\lambda}_{nn}|^2 dk}$
 $\tau_e = \frac{2\ell}{\beta c}$ est la longueur totale du faisceau (en secondes)

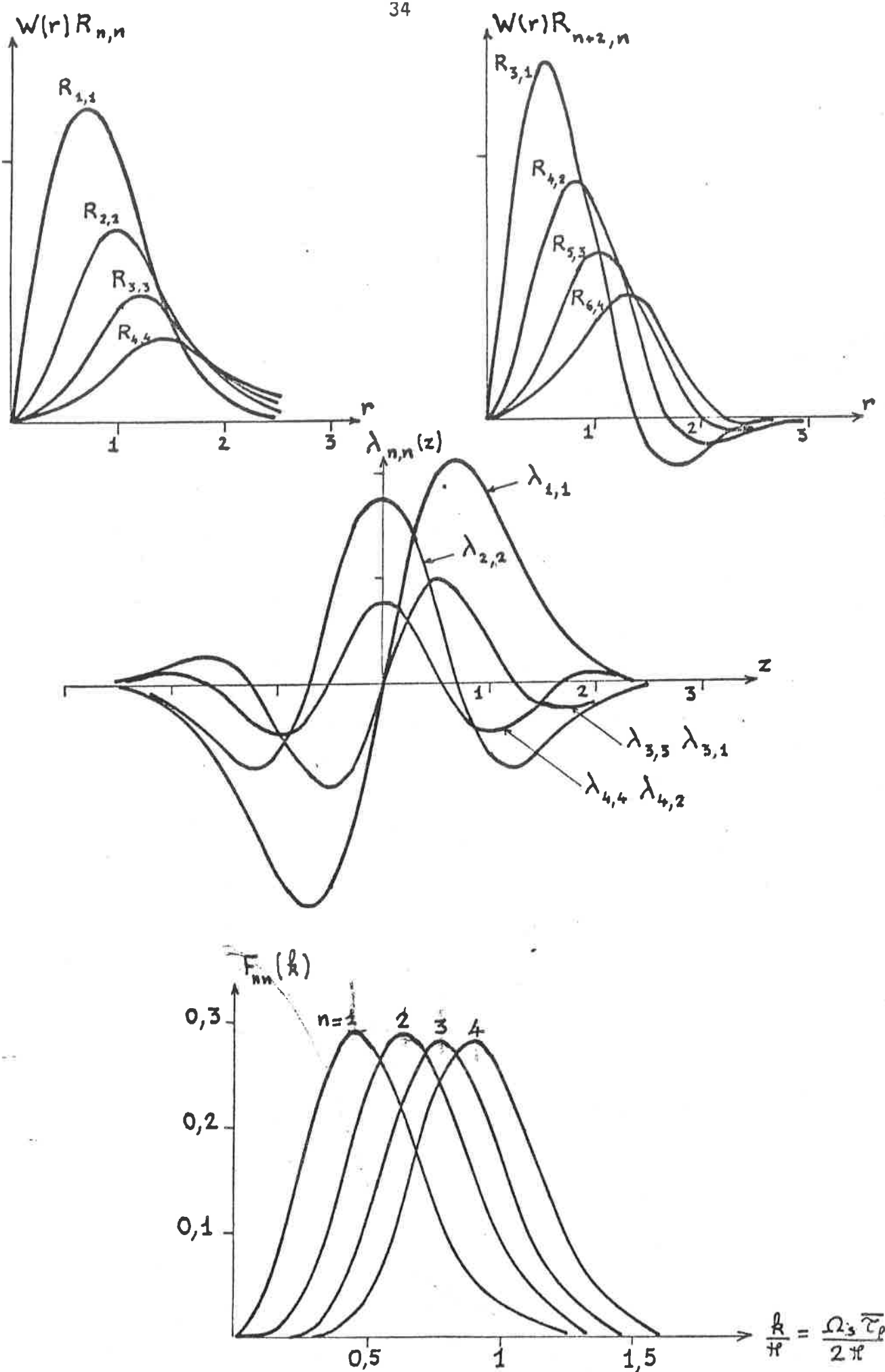


Fig. 11 - Modes radiaux $W(r)R_{nn}(r)$ et modes de densité pour le faisceau de densité gaussienne. $\tau_p = \frac{2\tau}{\beta C}$ est la longueur moyenne quadratique du faisceau

de $R(r)$ contribue à cette intégrale.

Les premiers modes radiaux $W(r)R_{mn}(r)$ et modes de densité λ_{mn} sont représentés sur les Figures 10 et 11 pour $m = n, n+2$ jusqu'à l'ordre octupolaire $n = 4$.

II-2- Résolution de l'équation intégrale pour les modes radiaux

II-2-1- Cas d'une dispersion nulle des fréquences incohérentes. Eléments de la matrice d'interaction $[^0M^n]$

Récrivant l'équation (8) sans dispersion

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\omega^0}{n\Delta\Omega_{sc}} R(r) &= W(r) \int_0^\infty G_n(r, r') R(r') r' dr' \\ G_n(r, r') &= \frac{4i\pi\Omega_{so}}{c} \int_{-\infty}^\infty \frac{\tilde{K}(k)}{k} J_n(kr) J_n(kr') dk \end{aligned} \quad (II-17)$$

avec

$$\Delta\omega^0 = \omega - n\Omega_S, \quad S = 0,$$

on obtient une équation intégrale linéaire, homogène, de seconde espèce, ou équation de Fredholm. Une méthode de résolution²⁵⁾ consiste à développer la solution $R(r)$ en série de modes $R_{mn}(r)$ ou, alternativement à approcher le noyau intégral par son développement bilinéaire

$$G_n(r, r') = \sum_{i,j} {}^0M_{ij}^n R_{in}(r) R_{jn}(r') \quad (II-18)$$

La théorie des polynômes orthogonaux justifie l'approximation moyenne d'une fonction continue par sections, telle que $G_n(r, r')$, par un développement de ce type. Reportant ce développement dans (17) on obtient

$$\frac{\Delta\omega^0}{n\Delta\Omega_{sc}} R(r) = W(r) \sum_{i,j} {}^0M_{ij}^n R_{in}(r) \int_0^\infty R(r') R_{jn}(r') r' dr' \quad (II-19)$$

MODES	FAISCEAU GAUSSIEN	FAISCEAU PARABOLIQUE
RADIAUX		
fonction poids $W(r)$	e^{-r^2} , $C = -\pi\Omega_{SO}/2$	$\{1-r^2\}^{-1/2}$, $C = -2\pi\Omega_{SO}/3$
$R_{mn}(r)$	$D_{mn} r^{\frac{n}{2}} L_{\frac{m-n}{2}}^{\frac{n}{2}}(r^2)$ (polynômes de Laguerre)	$D_{mn} r^{\frac{n}{2}} P_{\frac{m-n}{2}}^{-1/2}(1-2r^2)$ (polynômes de Jacobi)
constante de normalisation D_{mn}	$\left[\frac{2 \left(\frac{m-n}{2} \right)!}{\frac{m+n}{2}} \right]^{1/2}$	$\frac{m-n}{2} (-1)^{\frac{m-n}{2}} \left[\frac{(2m+1)(m+n-1)!!(m-n)!!}{(m+n)!!(m-n-1)!!} \right]^{1/2}$
DENSITES		
$\lambda_{mn}(z)$	$\frac{m-n}{2} (-1)^{\frac{m-n}{2}} \pi\Omega_{SO} E_{mn} \sqrt{\frac{2}{\pi}} H_m(z) e^{-z^2}$ (polynômes d'Hermite)	$\pi\Omega_{SO} E_{mn} P_m(z)$ (polynômes de Legendre)
$\lambda_{mn}^*(k)$	$i^{\frac{n}{2}} \pi\Omega_{SO} \frac{E_{mn}}{\pi\sqrt{2}} k^m e^{-k^2/4}$	$i^{\frac{n}{2}} \pi\Omega_{SO} E_{mn} \frac{J_{m+1/2}^{(k)}}{(2\pi k)^{1/2}}$
E_{mn}	$2^{-m} \left[\left(\frac{m-n}{2} \right)! \left(\frac{m+n}{2} \right)! \right]^{-1/2}$	$\left[\frac{(2m+1)(m-n-1)!!(m+n-1)!!}{(m-n)!!(m+n)!!} \right]^{1/2}$

TABLEAU 3 - Systèmes de modes orthornormés comme en (II-14)

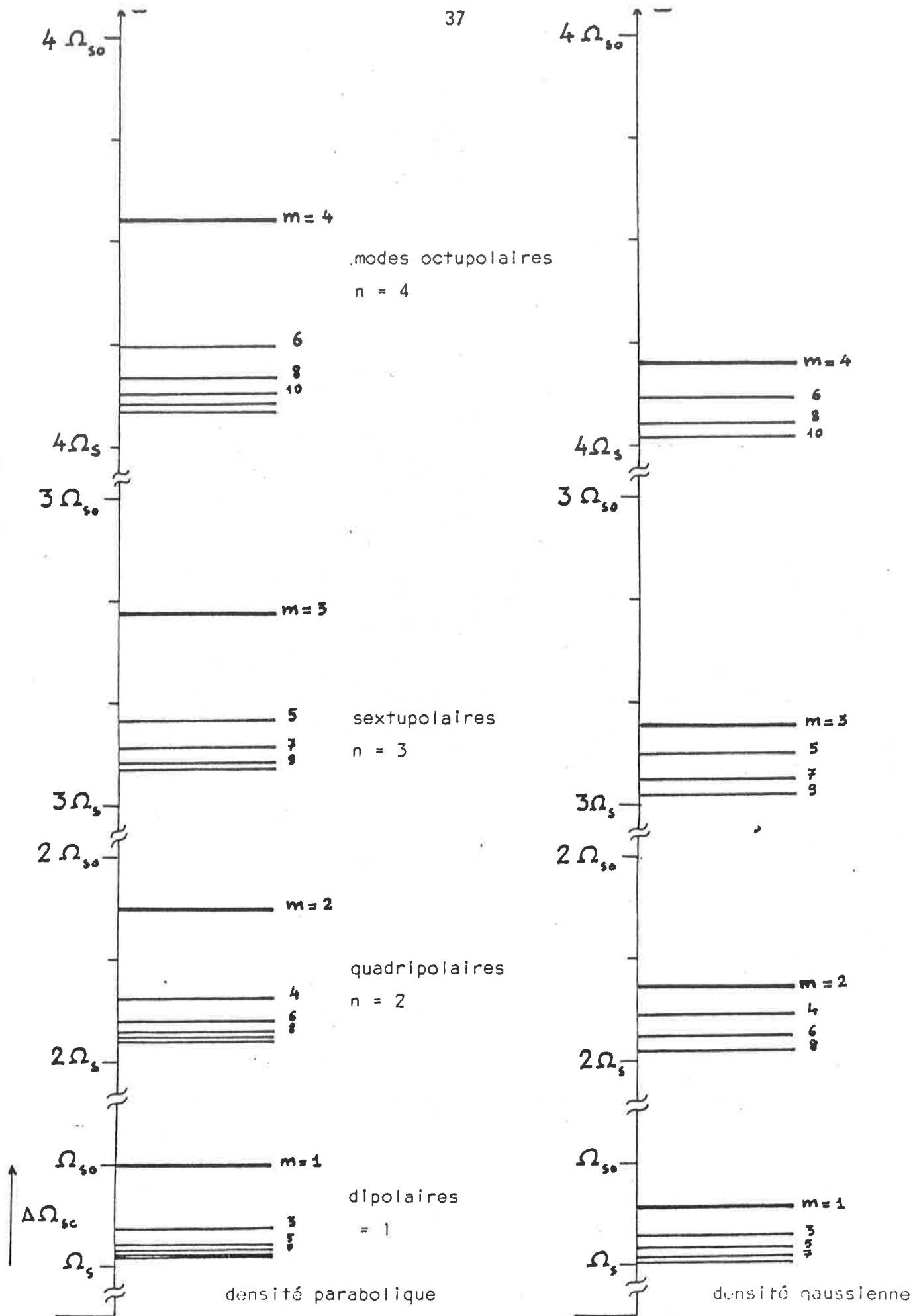


Fig. 12 - Spectre des fréquences propres de la matrice d'interaction [$^{\circ}M^n$].

Dans le cas gaussien, la force d'interaction stationnaire, non linéaire, n'est pas prise en compte dans cette matrice

dù les intégrales au second membre sont les constantes a_j du développement en série

$$R(r) = W(r) \sum_j a_j R_{jn}(r) \quad (II-20)$$

Multipliant les deux membres de l'équation (19) par $R_{kn}(r)$ et intégrant on obtient le système d'équations algébriques

$$\sum_j ({}^0M_{kj}^n - \frac{\Delta\omega^0}{n\Delta\Omega_{sc}} \delta_{jk}) a_j = 0$$

ou, en écriture matricielle

$$({}^0M^n) - \frac{\Delta\omega^0}{n\Delta\Omega_{sc}} [I] \vec{a} = 0 \quad (II-21)$$

Eléments de matrice ${}^0M_{ij}^n$. Egalant les expressions (17) et (18) du noyau $G_n(r, r')$, multipliant les deux membres par $W(r)W(r')R_{in}(r)R_{jn}(r')$ et intégrant par rapport à r et r' , on obtient les éléments de matrice sous la forme

$${}^0M_{ij}^n = \frac{4i\pi}{\Omega_{sc}C} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{K}(k)}{k} \tilde{\lambda}_{in}(k) \tilde{\lambda}_{jn}^*(k) dk \quad (II-22)$$

où l'on a utilisé la propriété de $\tilde{\lambda}_{in}(k)$ d'être à la fois transformée de Fourier-exponentiel et Fourier-Bessel (7) :

$$\tilde{\lambda}_{in}(-k) = \tilde{\lambda}_{in}^*(k) = (-1)^n \tilde{\lambda}_{in}(k) \quad (II-23)$$

Pour l'expression (I-28) du terme d'interaction $\tilde{K}(k)$, l'application du théorème de Parseval conduit à l'expression équivalente

$${}^0M_{ij}^n = - \frac{1}{\pi\Omega_{sc}\alpha C} \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda_{in}(x) \lambda_{jn}(x) dx \quad (II-24)$$

On a vu que pour l'interaction du faisceau avec une paroi d'impédance purement réactive, le terme d'interaction $\tilde{K}(k)$ (I-28) est purement imaginal-

re. En conséquence, les déviations de fréquences $\Delta\omega_{mn}^0$ des modes collectifs, qui sont les valeurs propres d'une matrice réelle et symétrique, sont toutes réelles. Dans le cas parabolique la matrice ${}^0M_{ij}^n$ est obtenue (Appendice C) directement sous forme diagonale, les modes de la Table 3 étant pour ce cas les solutions exactes de l'équation (17).

Le spectre des fréquences propres est représenté sur la Figure (12) jusqu'à l'ordre octupolaire $n = 4$. Les déviations de fréquence relatives au faisceau gaussien sont sensiblement plus faibles que dans le cas parabolique. Ceci est dû au fait que la force non linéaire de charge d'espace stationnaire, jusqu'ici négligée, contribue également à la déviation des fréquences propres. Cette force sera prise en compte par l'effet de dispersion $\Delta\Omega_{sc} G(r)$ (expression I-17) des fréquences incohérentes et devra, par exemple, établir la fréquence du mode dipolaire rigide $m = n = 1$ comme étant égale à la fréquence synchrotronique non perturbée Ω_{so} .

Vecteurs propres et fonctions propres. Désignant par $\vec{U}_m^0 = (U_{km}^0)$ les vecteurs propres orthonormés associés à la valeur propre $\Delta\omega_{mn}^0 / n\Delta\Omega_{sc}$

$$[{}^0M^n] \vec{U}_m^0 = \frac{\Delta\omega_{mn}^0}{n\Delta\Omega_{sc}} \vec{U}_m^0 \quad (II-25)$$

les relations d'orthogonalité s'écrivent

$$\vec{U}_m^0 \cdot \vec{U}_\ell^0 = \sum_k U_{km}^0 U_{k\ell}^0 = \delta_{\ell m} \quad (a) \quad (II-26)$$

et

$$\sum_m U_{km}^0 U_{\ell m}^0 = \delta_{k\ell} \quad (b)$$

cette dernière relation résultant de la propriété de transposition $[U^0]^T = [U^0]^{-1}$ de la matrice orthogonale qui diagonalise $[{}^0M^n]$. Les fonctions propres correspondantes $Q_{mn}^0(r)$, reliées aux polynômes auxiliaires R_{mn} par

$$Q_{mn}^0(r) = \sum_k U_{km}^0 R_{kn}(r) \quad (a) \quad (II-27)$$

$$R_{kn}(r) = \sum_m U_{km}^0 Q_{mn}^0(r) \quad (b)$$

vérifient la propriété générale (12) d'orthogonalité des solutions :

$$\int_0^\infty W Q_{mn}^0 Q_{ln}^0 r dr = \sum_{j,k} U_{km}^0 U_{jl}^0 \delta_{jk} = \delta_{lm} \quad (II-28)$$

Reportant le développement (27b) dans (18), et appliquant successivement les relations (25) et (26a), le noyau intégral $G_n(r, r')$ s'exprime à l'aide de ses fonctions propres et valeurs propres sous la forme

$$G_n(r, r') = \sum_m \frac{\Delta \omega_{mn}^0}{n \Delta \Omega_{sc}} Q_{mn}^0(r) Q_{mn}^0(r') \quad (II-29)$$

II-2-2- Résolution de l'équation complète. Eléments de la matrice de dispersion $[M^n]$.

Rétablissant la dispersion $\Omega_s(r)$ (I-23) des fréquences incohérentes, l'équation complète (8) s'écrit

$$\left(\frac{\Delta \omega}{n \Delta \Omega_{sc}} - D(r) \right) R(r) = W(r) \int_0^\infty G_n(r, r') R(r') r' dr' \quad (II-30)$$

$$\Delta \omega = \omega - n \Omega_s$$

$$D(r) = 1 - G(r) - \frac{S r^2}{\Delta \Omega_{sc}}$$

Dans cette équation le terme de dispersion $D(r)R(r)$ implique la solution

recherchée $R(r)$ et n'est donc pas simplement une inhomogénéité de l'équation (17), au sens habituel. On peut néanmoins justifier la méthode de résolution de l'équation complète (30) à l'aide d'un théorème du développement²⁵⁾, dont la généralité semble dépasser son application habituelle à la résolution des équations inhomogènes. Avec la notation utilisée au paragraphe précédent, le théorème s'énonce comme suit :

"Toute fonction $\phi(r)$ de la forme

$$\phi(r) = W(r) \int G_n(r, r') \psi(r') r' dr'$$

$\psi(r)$: fonction arbitraire,

peut se développer en série de fonctions propres du noyau $G_n(r, r')$

$$\phi(r) = W(r) \sum_{\ell} a_{\ell} Q_{\ell n}^0(r) ,$$

et les coefficients a_{ℓ} sont donnés par :

$$a_{\ell} = \frac{\Delta \omega_{\ell n}^0}{n \Delta \Omega_{sc}} \int Q_{\ell n}^0(r) \psi(r) r dr . "$$

Le théorème se vérifie aisément à l'aide de l'expression (29) du noyau intégral $G_n(r, r')$. L'appliquant à l'équation (30), le premier membre admet des développements de la forme

$$R(r) = W(r) \sum_{\ell} b_{\ell} Q_{\ell n}^0(r) \quad (a) \quad (II-31)$$

$$D(r) R(r) = W(r) \sum_{\ell} c_{\ell} Q_{\ell n}^0(r) , \quad (b)$$

où les coefficients b_{ℓ} et c_{ℓ} sont reliés par deux équations :

$$\frac{\Delta \omega}{n \Delta \Omega_{sc}} b_{\ell} - c_{\ell} = \frac{\omega_{\ell n}^0}{n \Delta \Omega_{sc}} b_{\ell} \quad (a) \quad (II-32)$$

et

$$c_{\ell} = \sum_j M_{\ell j}^n b_j . \quad (b)$$

La première relation résultant du théorème, la seconde est formée en reportant le développement (31a) dans (31b) et, appliquant l'orthogona-

lité des fonctions propres, on a posé

$$M_{\ell j}^n = \int_0^\infty W(r) D(r) Q_{\ell n}^0(r) Q_{j n}^0(r) r dr \quad (II-33)$$

Regroupant (32a et b) en fonctions des b_ℓ il vient

$$\sum_j \left[M_{\ell j}^n - \left(\frac{\Delta\omega - \Delta\omega_{jn}^0}{n\Delta\Omega_{sc}} \right) \delta_{j\ell} \right] b_j = 0 \quad (II-34)$$

$$([M^n] - \left(\frac{\Delta\omega - \Delta\omega_{jn}^0}{n\Delta\Omega_{sc}} \right) [I]) \vec{b} = 0$$

Les déviations de fréquences propres

$(\Delta\omega - \Delta\omega_{jn}^0)/n\Delta\Omega_{sc}$, dues à la dispersion des fréquences incohérentes, sont les valeurs propres réelles de la matrice symétrique $[M^n]$ (33).

Eléments de la matrice de dispersion $[M^n]$. Les éléments de matrice M_{ij}^n (33) présentent l'inconvénient d'être définis par rapport aux fonctions propres $Q_{mn}^0(r)$, qui ne coïncident avec les modes auxiliaires R_{mn} que dans le cas parabolique. Expriment le développement (31a) de la solution $R(r)$ par rapport aux modes auxiliaires :

$$R(r) = W(r) \sum_\ell b_\ell Q_{\ell n}^0 = W(r) \sum_{k,\ell} U_{k\ell}^0 b_\ell R_{kn} = W(r) \sum_k a_k R_{kn} \quad (II-35)$$

où : $\vec{a} = [U^0] \vec{b} \quad , \quad \vec{b} = [U^0]^T \vec{a}$

les éléments de matrice (33) s'écrivent

$$M_{\ell j}^n = \sum_{i,k} U_{i\ell}^0 {}^1M_{ik}^n U_{kj}^0 = [U]^T [{}^1M^n] [U] \quad (II-36)$$

où l'on a défini de nouveaux éléments de matrice par

$${}^1M_{ik}^n = \int_0^\infty W(r)D(r)R_{in}R_{kn}rdr \quad (\text{II-37})$$

L'équation aux valeurs propres (34) devient

$$([U^0]^T [{}^1M^n][U^0] - (\frac{\Delta\omega - \Delta\omega_{jn}^0}{n\Delta\Omega_{sc}}) [I]) [U^0]^T \vec{a} = 0,$$

soit, en multipliant cette équation à gauche par $[U^0]$:

$$([{}^0M^n] + [{}^1M^n] - \frac{\Delta\omega}{n\Delta\Omega_{sc}} [I]) \vec{a} = 0. \quad (\text{II-38})$$

Les déviations de fréquences propres $\Delta\omega_{ln} = \omega_{ln} - n\Delta\Omega_{sc}$ peuvent donc être obtenues par une diagonalisation directe de la somme des matrices d'interaction et de dispersion. Nous désignerons par $Q_{ln}(r)$, $\vec{U}_l = (U_{kl})$ et $Q_{ln}^1(r)$, $\vec{U}_l^1$ les fonctions et vecteurs propres associés respectivement aux valeurs propres $\Delta\omega_{ln}$ et $\Delta\omega_{ln}^1$, les valeurs propres de la matrice de dispersion. Ces grandeurs vérifient les définitions et relations d'orthogonalité (25 à 28).

Pour l'expression (30) de $D(r)$, incluant la dispersion de charge d'espace (cas gaussien) et celle due à la force synchrotronique non linéaire, nous récrivons la matrice de dispersion $[{}^1M^n]$ sous la forme :

$$[{}^1M^n] = [{}^1M^n]_{c.e.} - \frac{S}{\Delta\Omega_{sc}} [{}^1M^n]_S \quad (\text{II-39})$$

avec

$$({}^1M_{ij}^n)_{c.e.} = \delta_{ij} - \int_0^\infty W(r)G(r)R_{in}R_{jn}rdr$$

$$({}^1M_{ij}^n)_S = \int_0^\infty W(r)r^2R_{in}R_{jn}rdr$$

Ces éléments de matrice sont calculés à l'Appendice C. La dispersion synchrotronique $\propto -Sr^2$ est caractérisée par une matrice $[{}^1M^n]_S$

tridiagonale. Pour l'expression (I-17) de $G(r)$ la contribution matricielle de la charge d'espace gaussienne est obtenue sous une forme analytique plus complexe, mais facilement utilisable pour une exploitation numérique.

A ce stade du développement de la méthode de perturbation, nous pouvons nous demander avec quelle précision le spectre discret $\omega_{\ell n}^1$ de dispersion est susceptible d'approcher la bande continue des fréquences incohérentes d'expression (I-23) (Figure 4). Se limitant à des matrices de rang 20 on obtient, dans le cas parabolique, une assez bonne représentation de la bande continue par une répartition régulière des 20 fréquences $\omega_{\ell 1}$ à l'intérieur de cette bande (Figure 13). Dans le cas gaussien, seulement 6 fréquences $\omega_{\ell 1}$ sur 20 sont à l'intérieur de la bande de fréquences du faisceau dont la longueur est tronquée à $\ell = 2\sigma$. Dans ce cas, une loi de dispersion en $\bar{S}r^2$ semble donner une importance exagérée à la queue de la distribution gaussienne.

Un test plus significatif peut consister à appliquer la méthode de perturbation au cas de l'interaction simplifiée du paragraphe I-3 ce qui permet d'établir une comparaison avec la solution analytique donnée par la relation de dispersion (I-54). La simplification correspondante du noyau intégral (18) s'écrit :

$$G_1(r, r') = \frac{\Delta\omega_{11}^0}{\Delta\Omega_{sc}} R_{11}(r)R_{11}(r') \quad , \quad (II-40)$$

$$G(r) = 1 \quad (\text{dispersion de charge d'espace gaussienne négligée})$$

$$\Delta\omega_{11}^0 = \Delta\Omega_{sc} \quad \text{pour} \quad S = 0 \quad .$$

Le problème aux valeurs propres (38) admettant les simplifications

$${}^0M_{ij}^1 = \delta_{ij} \delta_{j1} \quad , \quad [{}^1M^1] = -\frac{S}{\Delta\Omega_{sc}} [{}^1M^1]_S \quad ,$$

la variation de la fréquence cohérente ω_{11} en fonction de S , obtenue en diagonalisant la somme de ces deux matrices, est reportée sur la Figure 9. Elle coïncide parfaitement avec la variation obtenue à l'aide de la relation de dispersion, mais seulement à l'extérieur de la bande

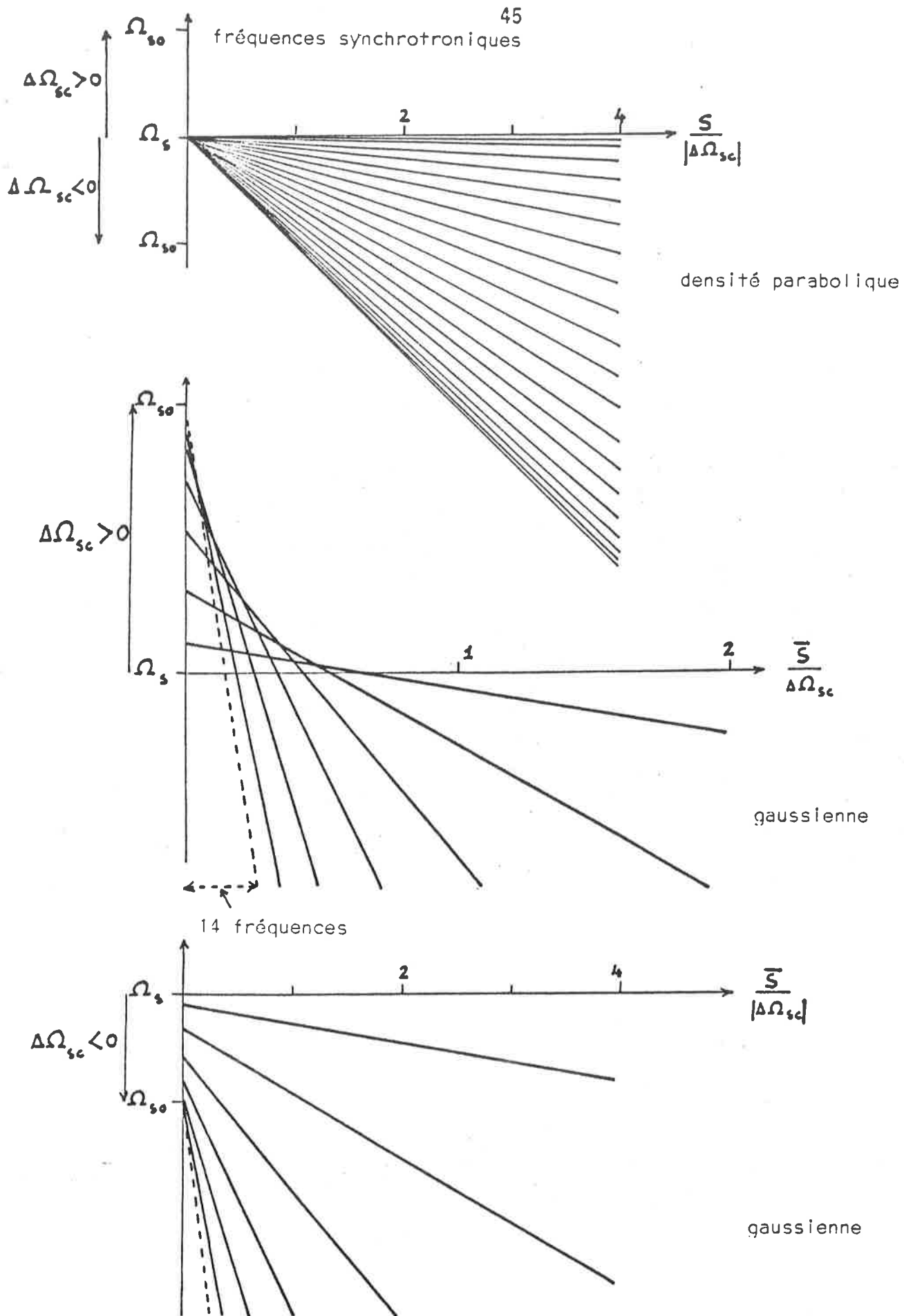


Fig. 13 - Approximation de la bande continue des fréquences synchrotroniques par 20 valeurs propres $\omega_{\pm 1}^1$ de la matrice de dispersion $[11^n]$. Dans le cas gaussien, seulement 6 fréquences sur 20 sont à l'intérieur de la bande de fréquences du faisceau tronqué à $\varphi = 2\pi$ (Figure 4)

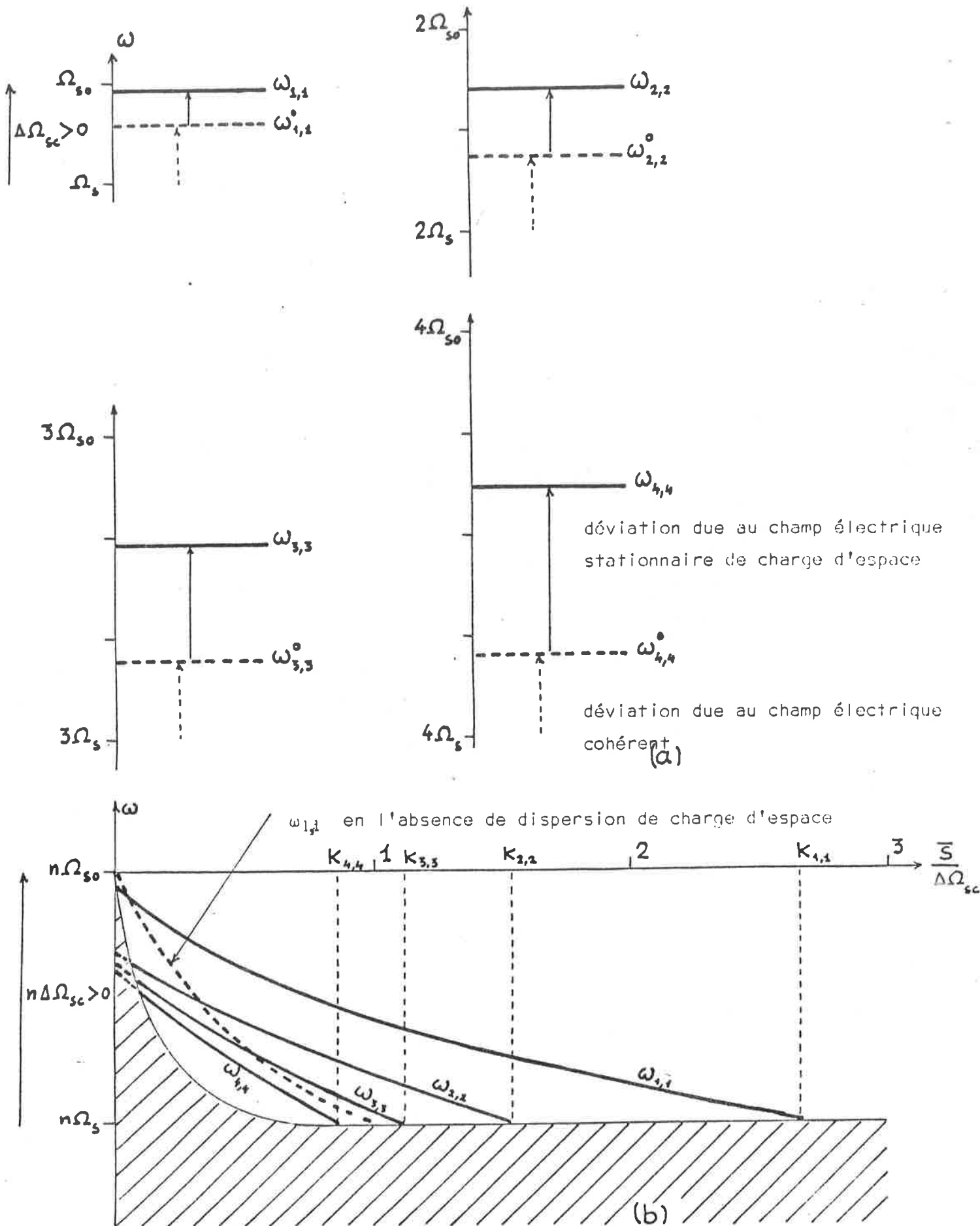


Fig. 14 - (a) Contribution de la charge d'espace stationnaire gaussienne à la déviation des fréquences propres $\omega_{nn}^0 (S=0)$, dans l'approximation du noyau synthétique
 (b) Variation de ces fréquences propres en fonction de la dispersion synchrotron $\bar{S}$

des fréquences incohérentes. A l'intérieur de cette bande, ω_{11} ne représente plus la fréquence cohérente, mais contribue, au même titre que les 19 autres fréquences propres (non représentées sur la Figure 9), à l'approximation discrète du spectre incohérent.

II-3- Variation des fréquences propres ω_{mn} en fonction de la dispersion synchrotronique S

Parmi les simplifications nécessaires à l'établissement d'une relation de dispersion telle que (I-52), la méthode de perturbation permet de rétablir l'effet de dispersion par la charge d'espace stationnaire (matrice $[{}^1M^n]_{ce}$ consistante avec une densité gaussienne) et l'interaction longitudinale exacte (matrice $[{}^0M^n]$ relative à une impédance de paroi purement réactive). Comme application directe du problème à valeurs propres (38), nous calculons la variation des fréquences propres ω_{mn} en fonction de la dispersion synchrotronique S, en considérant d'abord l'effet de dispersion de charge d'espace, puis l'interaction exacte.

II-3-1- Déviation des fréquences propres due à la charge d'espace gaussienne, dans l'approximation du noyau synthétique

Dans le spectre des fréquences propres ω_{mn}^0 du faisceau gaussien (Figure 12), nous ne retenons que les fréquences d'ordre $m = n$. La simplification correspondante du noyau $G_n(r, r')$ d'expression (29), dite approximation du noyau synthétique, s'écrit

$$G_n(r, r') = \frac{\Delta\omega_{nn}^0}{n\Delta\Omega_{sc}} Q_{nn}^0(r) Q_{nn}^0(r') \quad (\text{II-41})$$

Effectuant le développement (27a) de Q_{nn}^0 en fonction des polynômes R_{mn}^0 , la matrice d'interaction s'exprime à l'aide de ses vecteurs propres U_{mn}^0 par

$$\tilde{M}_{ij}^n = \frac{\Delta\omega_{nn}^0}{n\Delta\Omega_{sc}} U_{in}^0 U_{jn}^0 \quad (\text{II-42})$$

ce qui constitue une simplification de la forme exacte

$$o_{M_{ij}}^n = \sum_{m=n}^{\infty} \frac{\Delta \omega_{mn}^o}{n \Delta \Omega_{sc}} U_{im}^o U_{jm}^o \quad (II-43)$$

La variation des fréquences ω_{nn} en fonction de $\bar{S}$ est représentée sur la Figure 14. Pour une dispersion $\bar{S}$ nulle, on obtient une déviation due à la charge d'espace stationnaire qui est du même ordre de grandeur que celle due au champ électrique cohérent propre à chaque mode (Figure 14a). Ainsi la fréquence ω_{11} du mode dipolaire rigide est pratiquement rétablie comme étant égale à la fréquence non perturbée Ω_{so} , mais ne le sera exactement que pour l'interaction non simplifiée (43). Comme pour $\Delta \Omega_{sc} > 0$ les dispersions $\bar{S}$ et de charge d'espace se retranchent, les seuils de stabilité $K_{nn} = \left(\frac{\bar{S}}{\Delta \Omega_{sc}} \right)_{\text{seuil}}$ (Figure 14b) sont déplacés dans le sens d'une plus grande instabilité de ces modes.

II-3-2- Cas de l'interaction exacte (impédance de paroi purement réactive)

Résolvant à nouveau l'équation aux valeurs propres (38) avec des matrices de rang 20, on a représenté sur les Figures 15 à 18 la variation des fréquences propres qui se situent à l'extérieur de la bande des fréquences synchrotroniques. Rappelons que les modes correspondants sont potentiellement instables, car leurs fréquences propres admettraient une composante imaginaire si l'on tenait compte de la conductivité finie de la paroi. Seulement un petit nombre de modes de même ordre harmonique n sont susceptibles d'être ainsi excités, le plus grand nombre parmi les 20 fréquences propres calculées représentant le spectre incohérent. Considérant les modes $m = n$ les plus cohérents, la variation des fréquences $\omega_{n,n}$ ne s'écarte de celle obtenue dans l'approximation du noyau synthétique qu'au voisinage de la bande des fréquences incohérentes. Par rapport à cette bande, $\omega_{n,n}$ peut admettre une variation presque tangentielle, ce qui rend plus approximative la délimitation du seuil de stabilité K_{nn} (cas des modes paraboliques $n = 1$ et 2 de la Figure 15).

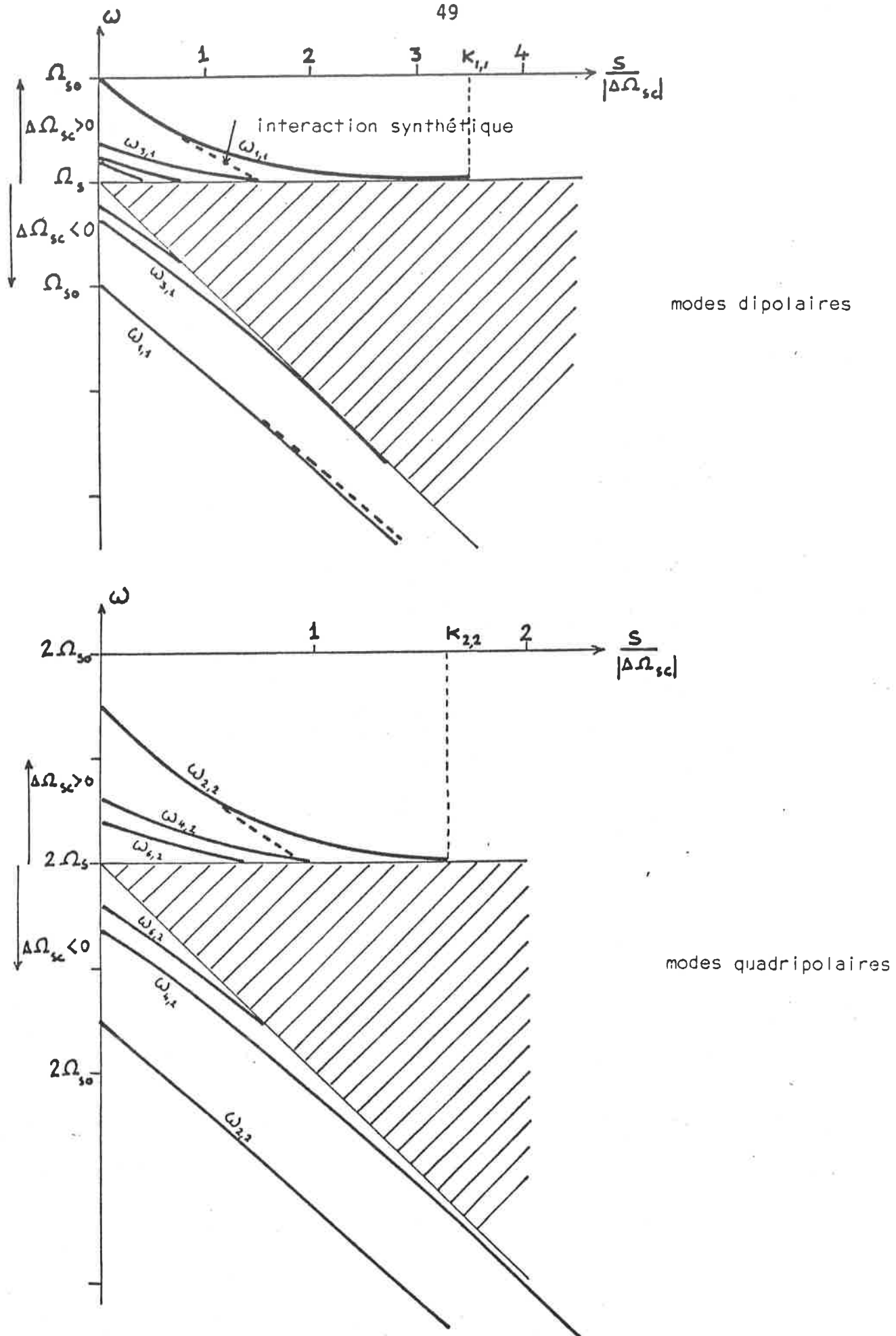


Fig. 15 - Variation des fréquences propres des modes dipolaires et quadripolaires paraboliques par rapport à la bande des fréquences incohérentes, pour l'expression exacte de l'interaction du faisceau avec une paroi d'impédance purement réactive

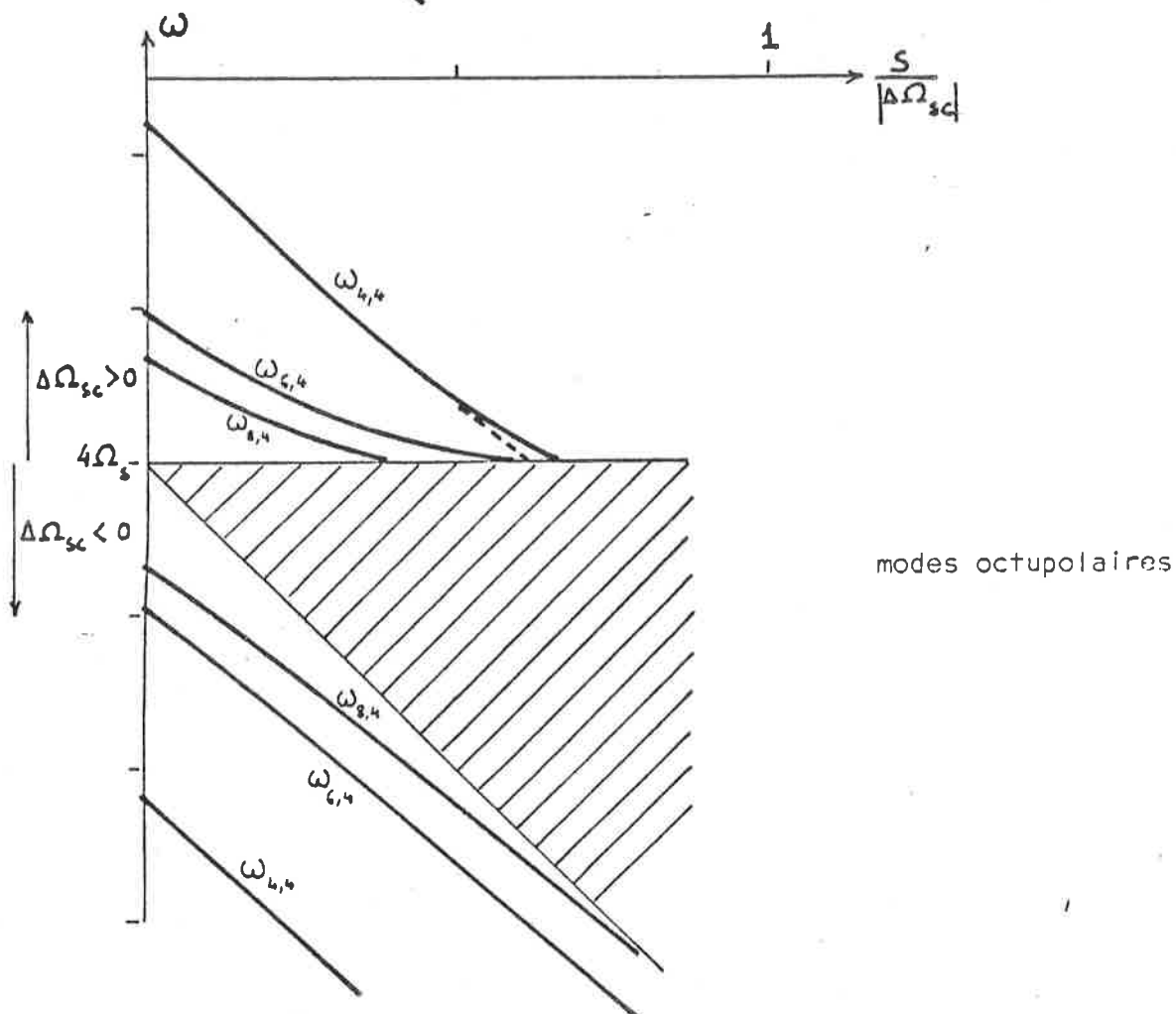
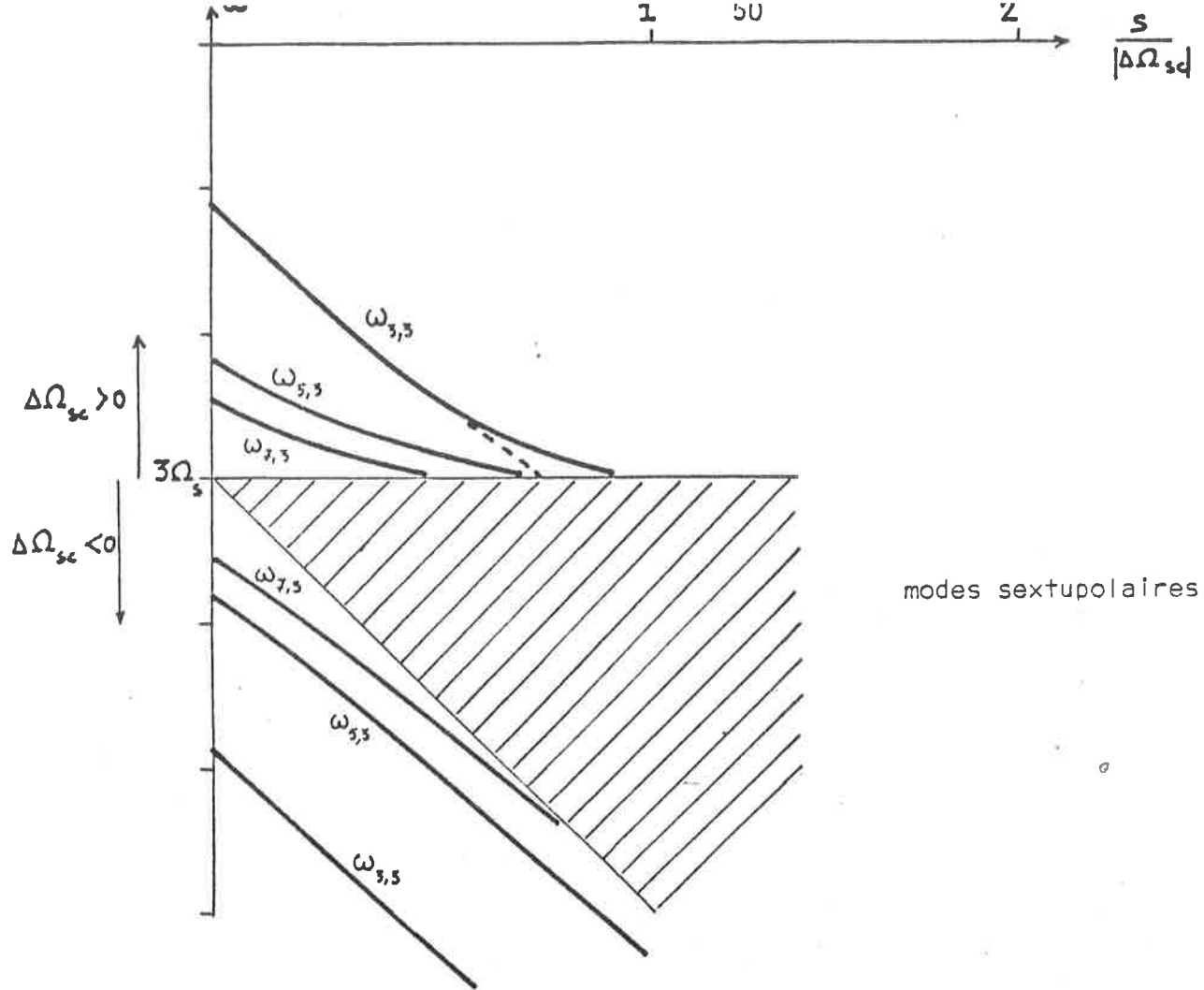


Fig. 16 - Variation des fréquences propres des modes sextupolaires et octupolaires paraboliques

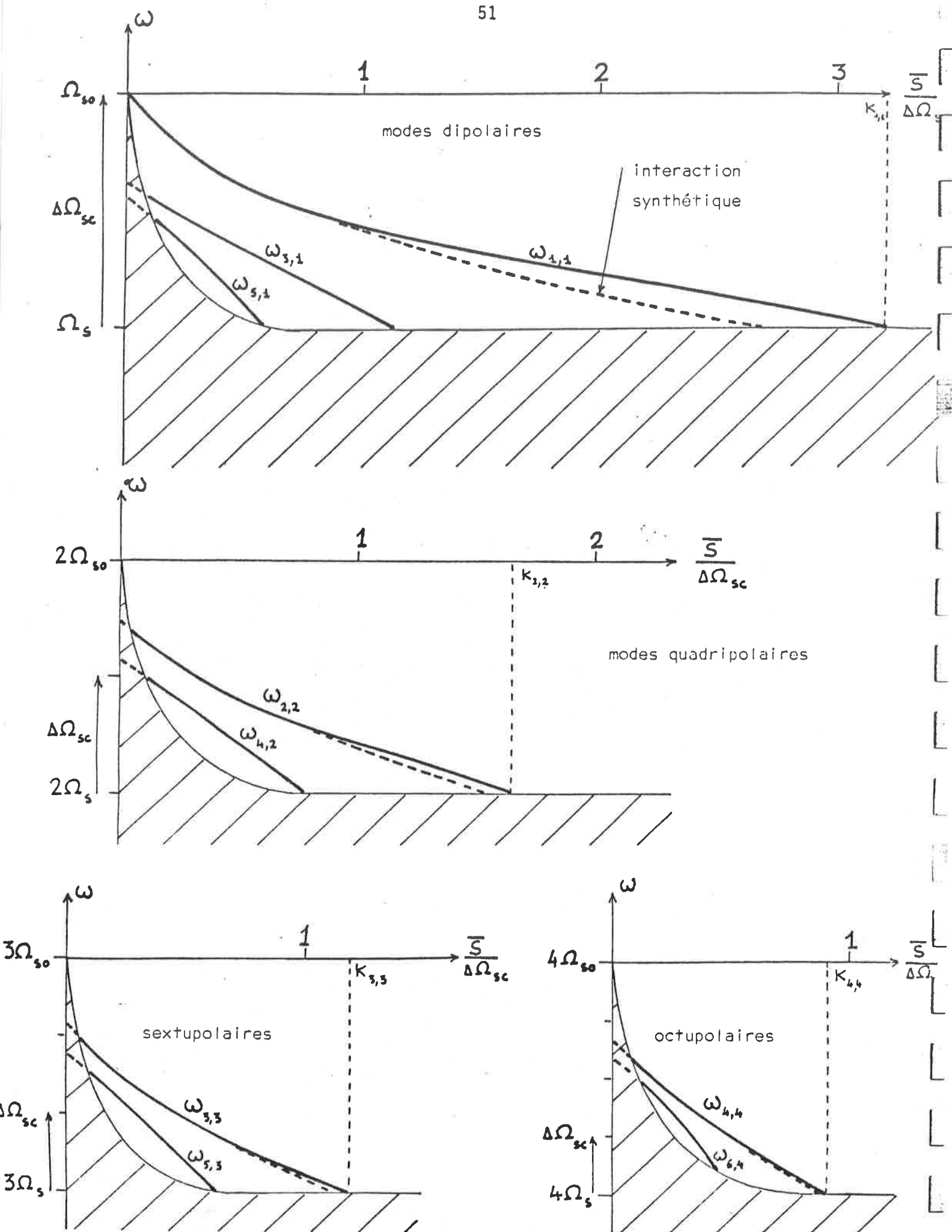


Fig. 17 - Variation des fréquences propres des modes les plus cohérents pour un faisceau à densité gaussienne et pour $\Delta\Omega_{sc} > 0$

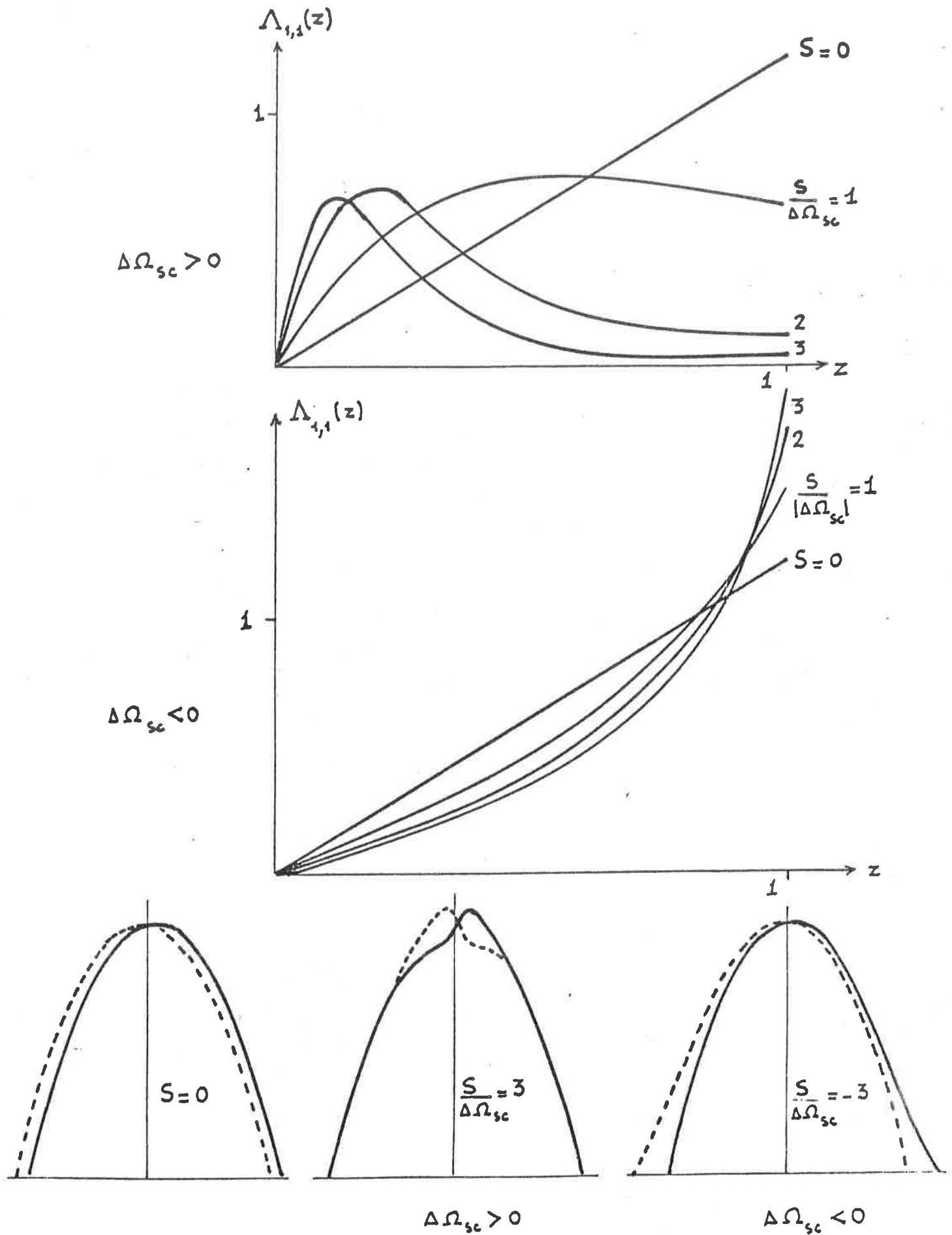


Fig. 18 - Variations de la perturbation cohérente de densité de mode $m = n = 1$ (cas parabolique), lorsque la fréquence $\omega_{1,1}$ approche le seuil de stabilité

Forme des modes de densité. La forme d'un mode de densité $\Lambda_{mn}(z)$, $\tilde{\Lambda}_{mn}(k)$, de fréquence propre ω_{mn} , peut aisément se déduire des calculs précédents (résolution de l'équation 38) à l'aide de son expression en fonction des modes auxiliaires $\lambda_{jn}(z)$, $\tilde{\lambda}_{jn}(k)$ (Tableau 3)

$$\begin{aligned}\Lambda_{mn}(z) &= \sum_j U_{jm} \lambda_{jn}(z) \\ \tilde{\Lambda}_{mn}(k) &= \sum_j U_{jm} \tilde{\lambda}_{jn}(k)\end{aligned}\quad (II-44)$$

Les modes dipolaires paraboliques ainsi obtenus sont représentés sur la Figure 18. Les variations de forme de ces modes, en fonction de leur séparation en fréquence par rapport à la bande incohérente, et en fonction du signe de la déviation $\Delta\Omega_{sc}$, semblent être remarquables. Pour $\Delta\Omega_{sc} > 0$, à mesure que le mode approche le seuil de stabilité ($\frac{S}{\Delta\Omega_{sc}} \approx 3,5$) la perturbation de densité $\Lambda_{11}(z)$ est de plus en plus concentrée à l'intérieur du faisceau. Ceci peut s'expliquer par le couplage entre le mode cohérent et les oscillateurs incohérents. Pour une dispersion S croissante, la fréquence collective tend vers la fréquence des particules appartenant au centre du faisceau pour $\Delta\Omega_{sc} > 0$, et vers la fréquence des particules de grande amplitude pour $\Delta\Omega_{sc} < 0$. Dans ce dernier cas on constate effectivement que la perturbation cohérente de densité est rejetée vers le bord du faisceau.

Pour comparaison avec les modes réellement observés, la Figure 19 représente d'autres oscillations dipolaires de la densité. La Figure 20 représente les variations dans le spectre des nombres d'ondes pour ces différentes oscillations ou, plus précisément, le facteur de forme $F_{m1}(k)$ résultant de la normalisation des modes $\tilde{\Lambda}_{m1}(k)$:

$$F_{mn}(k) = \frac{|\tilde{\Lambda}_{mn}(k)|^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{\Lambda}_{mn}|^2 dk} \quad (II-45)$$

Ces figures montrent la stabilisation de l'oscillation aux bords du faisceau, en fonction d'une largeur de bande incohéren-

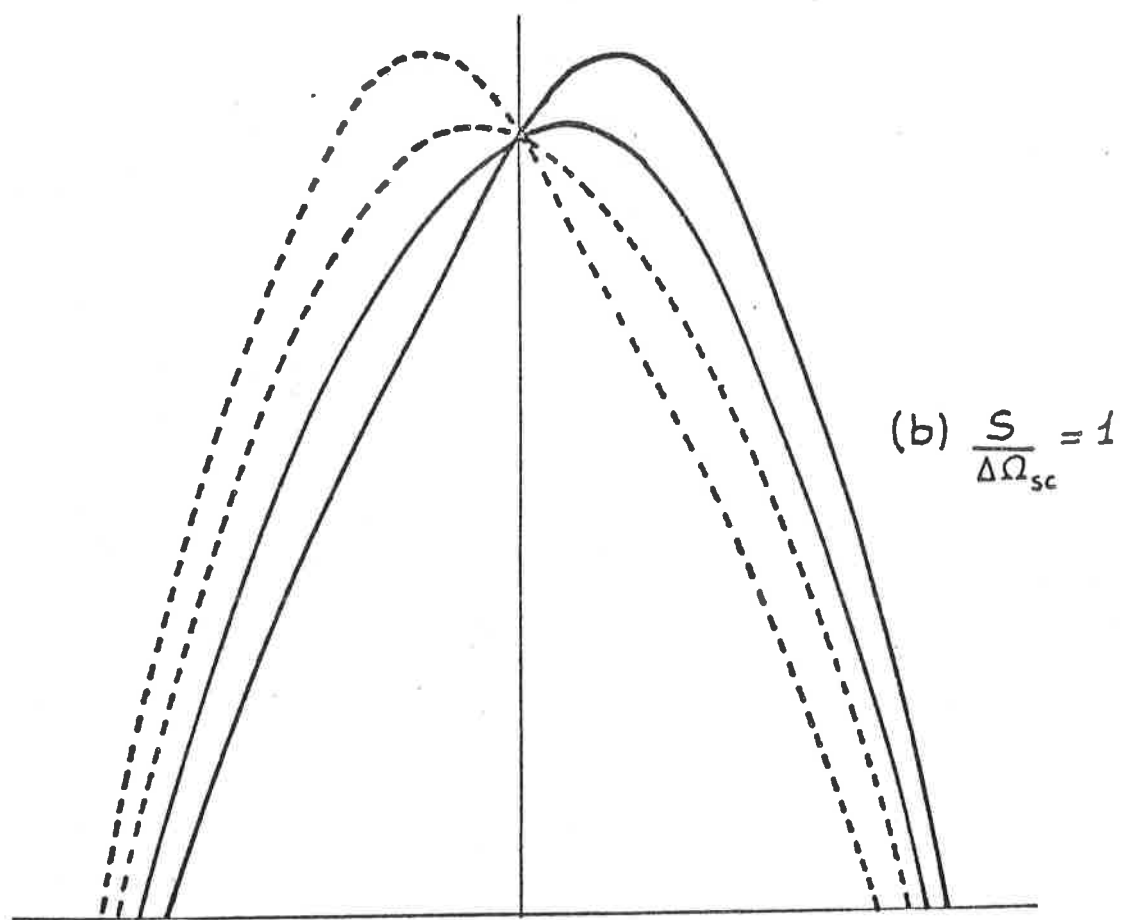
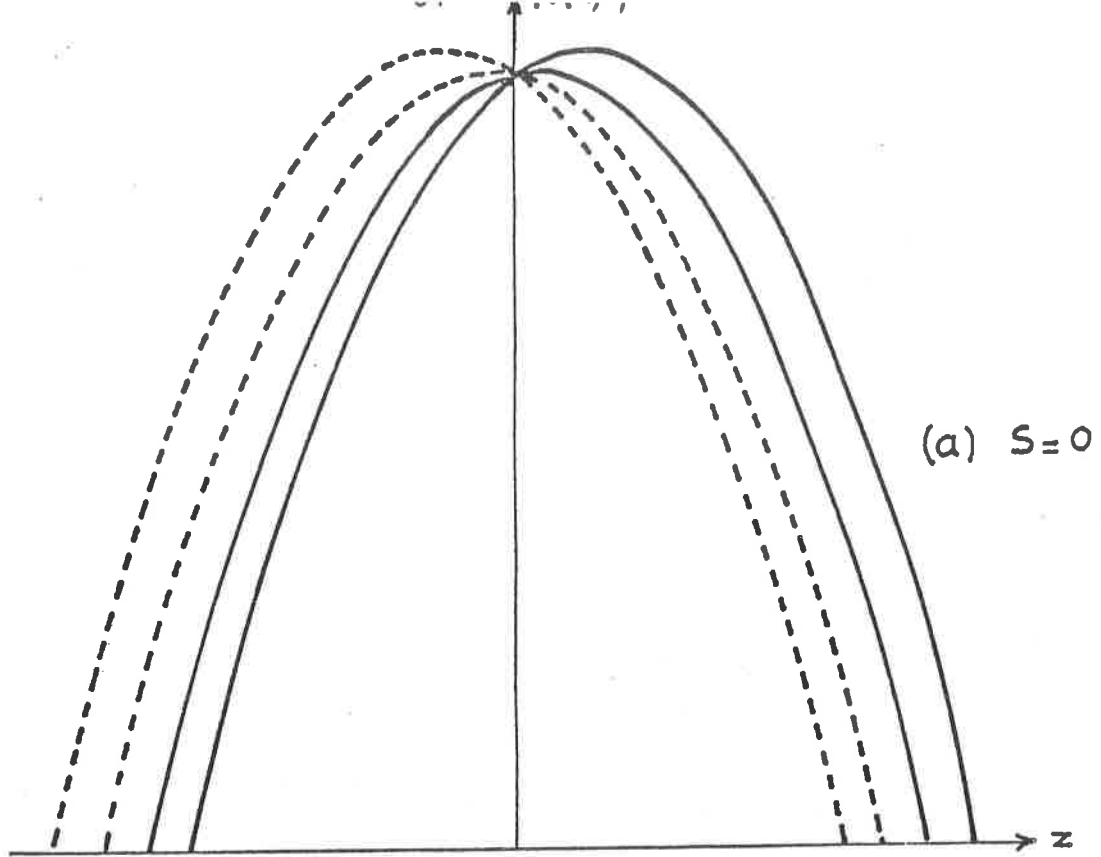


Fig. 19 - Différentes formes de modes de densité (a), (b), (c) (au verso) pour une dispersion S croissante

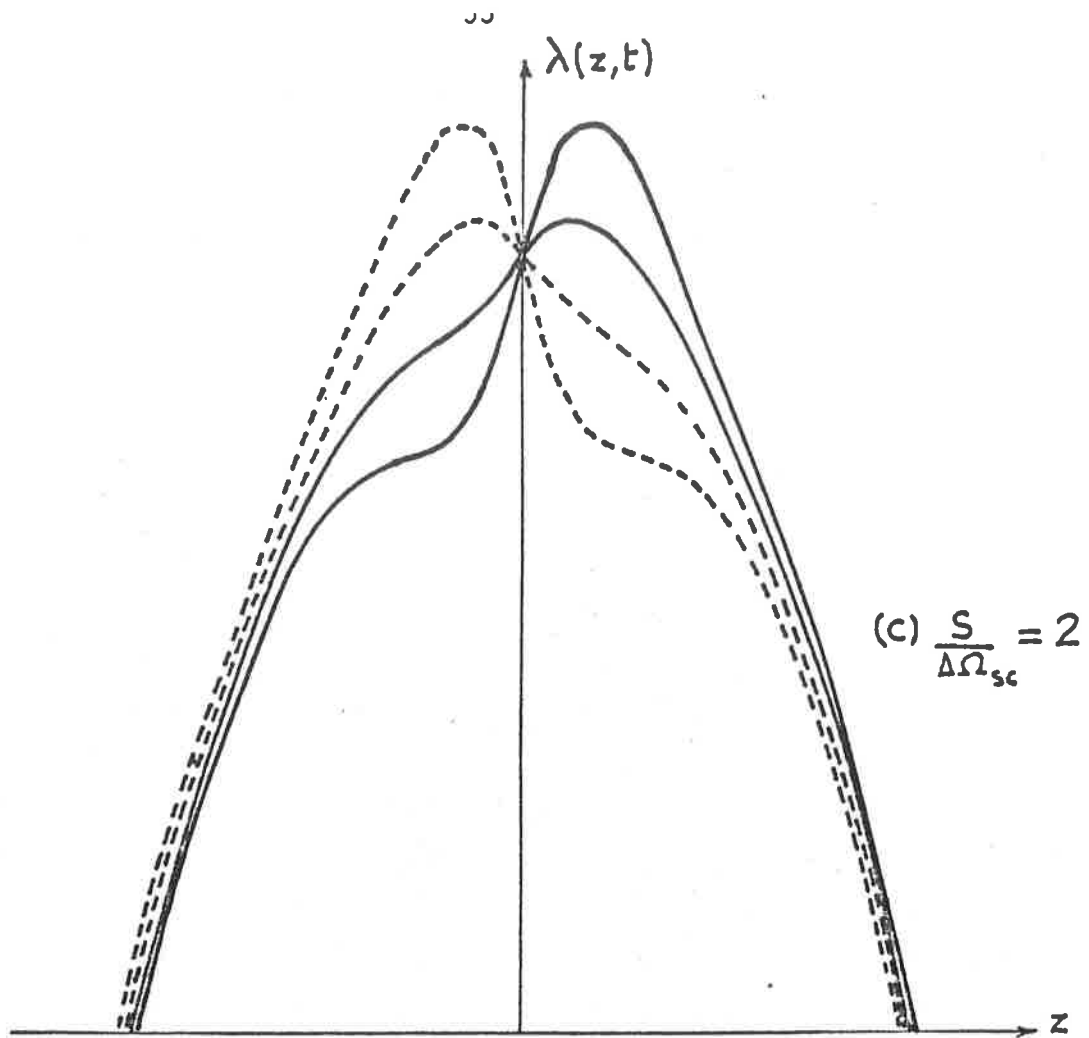


Fig. 19 (c)

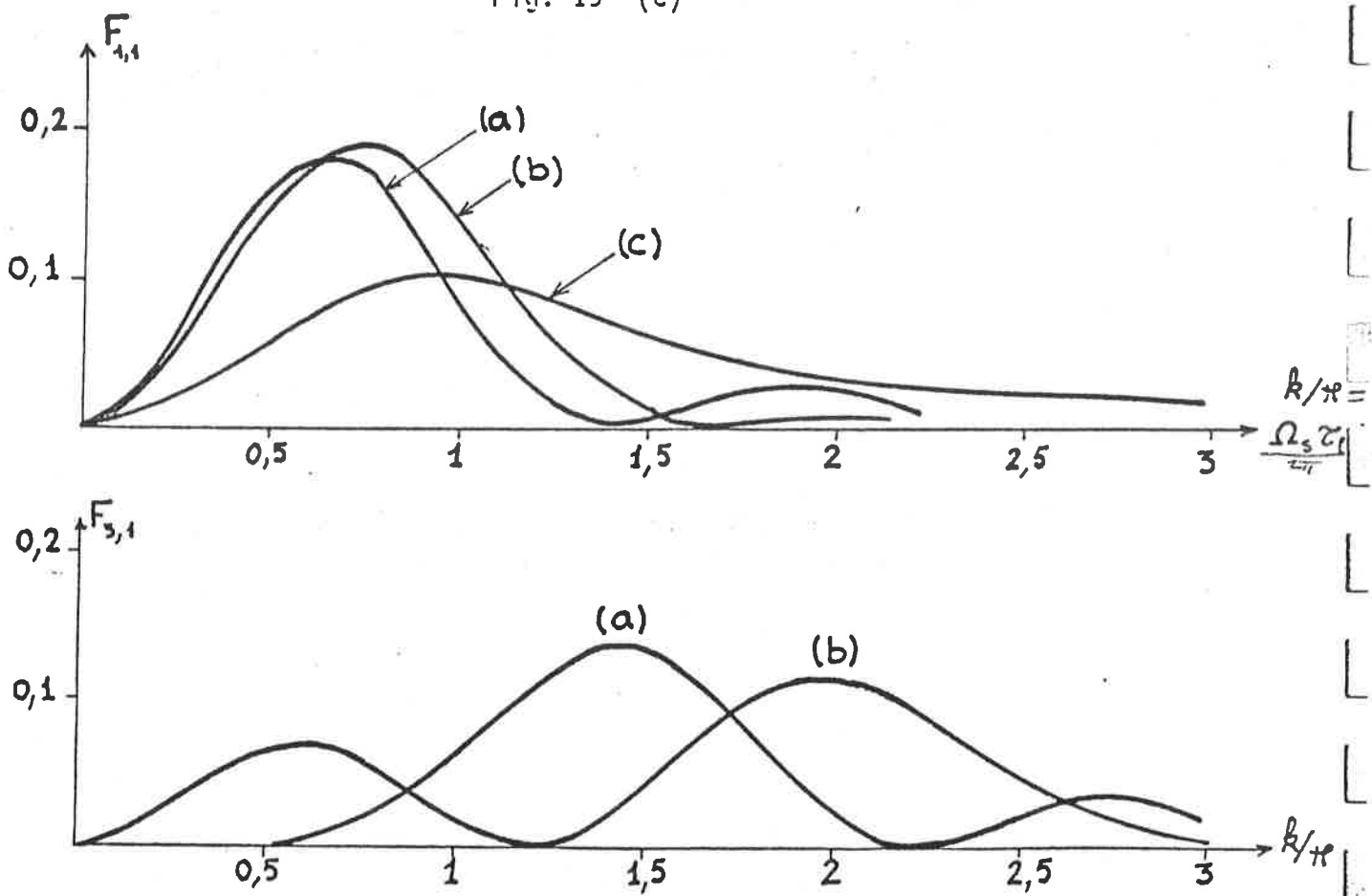


Fig. 20 - Variations du facteur de forme des modes de densité. correspondant aux modes de la Figure 19

te S croissante. On remarque également une forte concentration de la perturbation de densité au centre du faisceau.

Variation des fréquences cohérentes et incohérentes en fonction de l'intensité du faisceau à densité parabolique. En pratique, les seuils des instabilités collectives sont plus couramment exprimés à l'aide de l'intensité correspondante du faisceau, que par le rapport $\frac{S}{\Delta\Omega_{sc}}$ que nous avons utilisé jusqu'à présent. Les paramètres $\Delta\Omega_{sc}$ et S , d'expressions (I-15) et (I-22), dépendent du nombre N de particules soit explicitement, soit par l'intermédiaire de la longueur 2ℓ du faisceau. En fait, une étude de la variation d'émittance²⁶⁾ en fonction de la charge transportée par le faisceau du booster, montre que la longueur du faisceau varie peu dans le domaine $5N = 0$ à $2,5 \times 10^{12}$ protons par anneau. Pour une émittance égale à 10 mrd, la longueur du faisceau $\tau_\ell = \frac{2\ell}{\beta c}$ à 800 MeV est donc supposée être indépendante de la charge et égale à 55 nanosecondes. Il en résulte une largeur de bande incohérente constante, de l'ordre de 300 Hz, et une déviation $\Delta\Omega_{sc}$ à variation linéaire en fonction de l'intensité du faisceau.

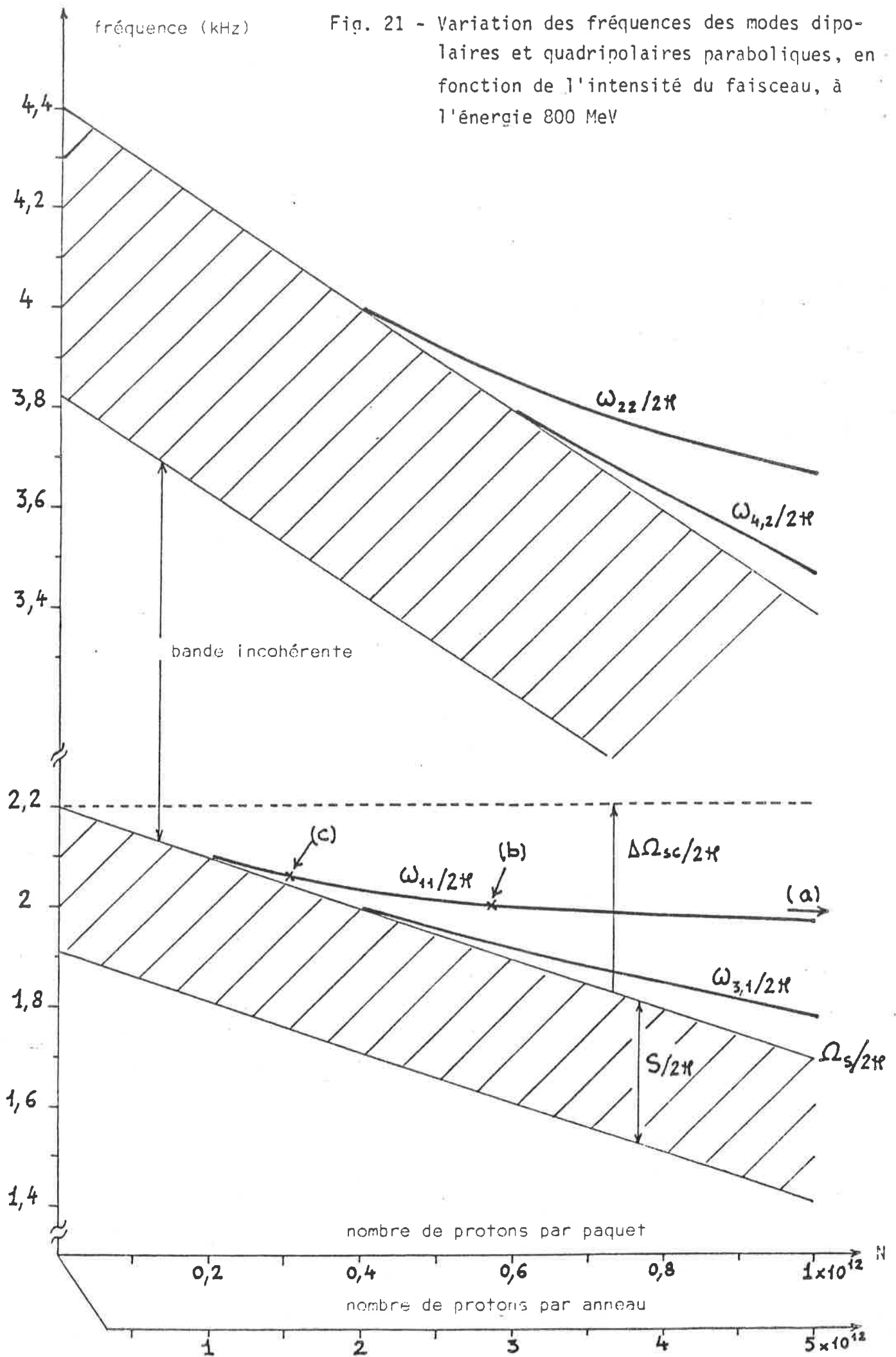
Utilisant les diagrammes des Figures 15 et 16, nous avons représenté sur les Figures 21 et 22 la variation des fréquences cohérentes par rapport à la bande incohérente, en fonction de la charge transportée par le faisceau du booster. Les instabilités (fréquence collective à l'extérieur de la bande incohérente) surviennent du fait que les fréquences cohérentes sont moins déviées que la bande incohérente par la charge d'espace. A l'intensité prise en référence pour établir les paramètres du Tableau 2 ($2,5 \times 10^{12}$ protons par anneau), seuls les modes dipolaires et quadripolaires seraient instables. On a également indiqué sur la Figure 21 les intensités correspondant aux différents modes dipolaires de la Figure 19a,b et c.

Conclusion

L'application d'une méthode de perturbation à la résolution de l'équation de Vlasov nous a permis de ramener la recherche des modes collectifs à la résolution d'un problème algébrique à valeurs propres. De cette manière nous avons calculé les fréquences propres aux

modos lorsqu'elles se situent à l'extérieur de la bande des fréquences synchrotroniques, ce qui nous a permis d'appliquer le critère de stabilité. Nous avons également décrit la perturbation de densité au voisinage du seuil de stabilité et son spectre des nombres d'ondes.

Nous nous proposons maintenant de montrer que la description d'un modes collectif, dont la fréquence est à l'intérieur de la bande incohérente, peut être obtenue en résolvant le même problème algébrique pour une perturbation initiale donnée.



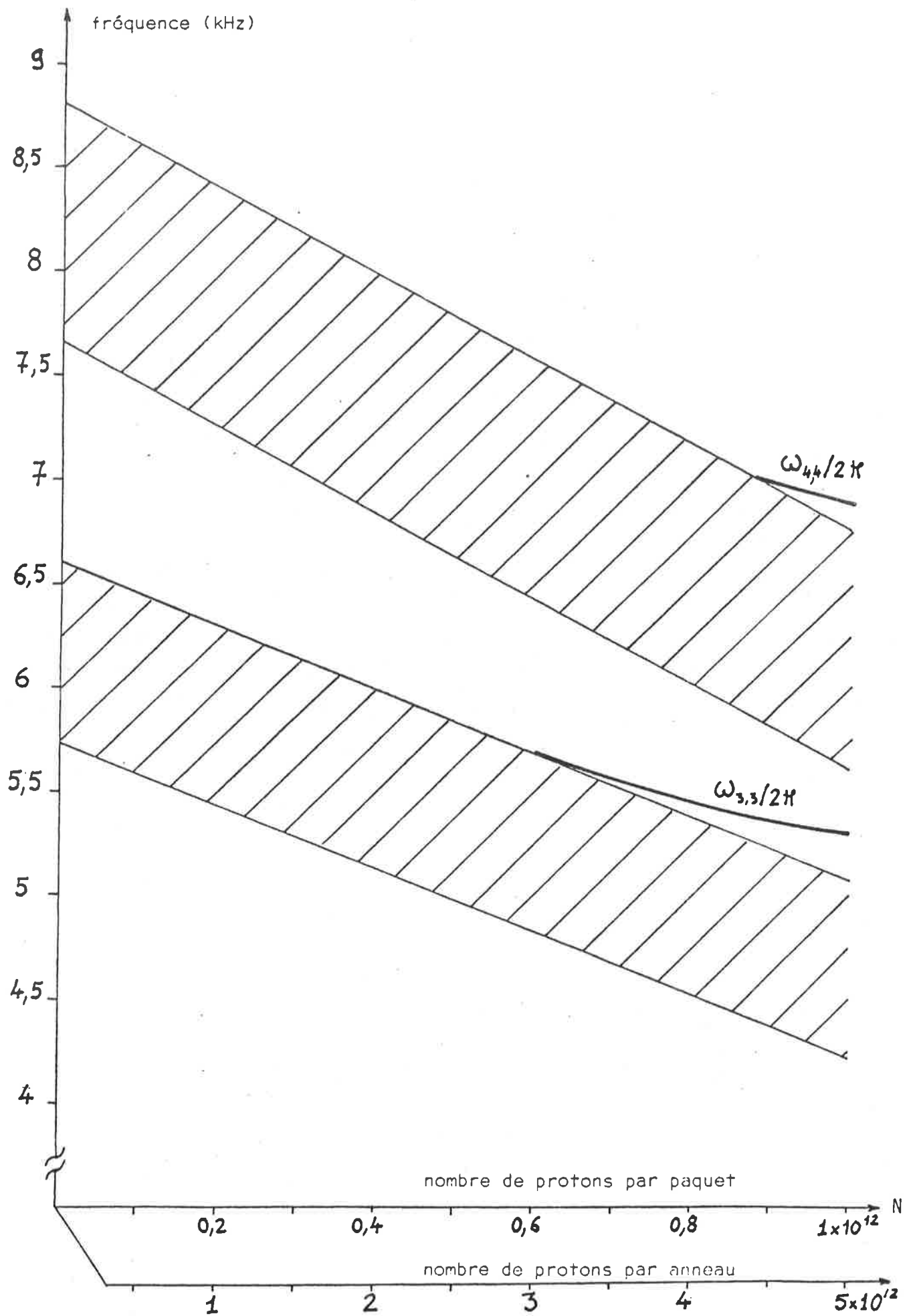


Fig. 22 - Variation des fréquences des modes sextupolaires et octupolaires paraboliques à 800 MeV

III - RESOLUTION DU PROBLEME A VALEUR INITIALE : OSCILLATION LIBRE D'UNE PERTURBATION INITIALE DE LA DENSITE

Ce problème n'a été résolu que pour l'interaction simplifiée que nous avons considérée au paragraphe I-3-, c'est-à-dire lorsque le champ local de charge d'espace $\propto \frac{\partial \lambda}{\partial z}$ est remplacé par une interaction moyenne, ne dépendant par exemple que de l'oscillation d'un moment de la distribution (le barycentre pour le mode dipolaire). Nous rappelons brièvement le traitement de Landau⁵⁾ - Case⁷⁾ qui conduit à une relation de dispersion telle que (I-51), et à un spectre continu de fréquences collectives.

Nous montrons ensuite que, pour l'interaction exacte $\propto \frac{\partial \lambda}{\partial z}$, la méthode de perturbation que nous avons développée peut s'adapter aisément à la résolution de ce même problème à valeur initiale. On obtient ainsi une bonne approximation de la densité du spectre des fréquences collectives dans la bande des fréquences incohérentes. On établit également une relation de dispersion des fréquences collectives, qui met en évidence le couplage entre le mode le plus cohérent et les modes secondaires habituellement négligés par la théorie de la stabilité.

III-1- Traitement de Landau-Case. Approximation du noyau synthétique

Considérant une perturbation de densité à symétrie de révolution d'ordre n dans le plan de phase :

$$\begin{aligned} f_1(r, \theta, t) &= g(r, t) e^{-in\theta} \\ f_1(r, \theta, t=0) &= g_0(r) e^{-in\theta} \end{aligned} \quad (\text{III-1})$$

la forme intégrale (II-8) de l'équation de Vlasov s'écrit :

$$\frac{\partial g(r, t)}{\partial t} + in\Omega_s(r)g(r, t) = -in\Delta\Omega_{sc}W(r) \int_0^\infty G_n(r, r')g(r', t)r'dr'. \quad (\text{III-2})$$

Dans l'approximation du noyau synthétique, l'expression (II-18) de $G_n(r, r')$ s'écrit :

$$G_n(r, r') = \frac{\Delta\omega_{nn}^0}{n\Delta\Omega_{sc}} R_{nn}(r)R_{nn}(r') , \quad (\text{III-3})$$

où $\Delta\omega_{nn}^0$ est, comme précédemment, la déviation de fréquence $\omega - n\Omega_s$ du mode le plus cohérent en l'absence de dispersion synchrotrique ($S=0$), les modes moins cohérents étant négligés :

$$\Delta\omega_{mn}^0 \equiv 0 , \quad m > n$$

Remarquant que les polynômes $R_{nn} = D_{nn} r^n$ décrivent la perturbation radiale associée à une oscillation du moment $z^n(t)$ de la distribution :

$$\overline{z^n(t)} = \Omega_{so} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} r^n \cos^n \theta g(r, t) e^{-in\theta} r dr d\theta = \frac{\pi \Omega_{so}}{2^{n-1} D_{nn}} \int_0^\infty g(r, t) R_{nn}(r) r dr , \quad (\text{III-4})$$

et reportant (3) dans (2), on obtient :

$$\frac{\partial g(r, t)}{\partial t} + in\Omega_s(r)g(r, t) = -i \frac{2^{n-1}}{\pi \Omega_{so}} D_{nn} \Delta\omega_{nn}^0 \overline{z^n(t)} W(r) R_{nn}(r) , \quad (\text{III-5})$$

$$\Omega_s(r) = \Omega_s - S r^2$$

Comparant cette équation à sa forme exacte (I-37), l'interaction locale $F_1(z, t) \propto \frac{\partial \lambda}{\partial z}$ a été remplacée par une interaction moyenne $\propto \overline{z^n(t)}$, indépendante de z .

III-1-1- La transformation de Laplace à deux contours d'inversion

Etant donnée une perturbation initiale (1), l'évolution dans le temps de la densité $g(r, t)$, solution de (5), peut être obtenue à l'aide d'une transformation de Laplace. Le traitement original de Landau ⁵⁾, se rapportant aux oscillations de densité d'un plasma, utilise la transformation de Laplace habituelle, avec un contour unique d'inversion dans le plan des fréquences complexes. Cette méthode est adaptée à la recherche de solutions asymptotiques du temps, qui sont d'ordre exponentiel. La contribution de Case ⁷⁾ consiste à appliquer une

transformation de Laplace à deux contours d'inversion, permettant d'obtenir des solutions valables pour tous les temps, dont la variation asymptotique du temps n'est pas nécessairement d'ordre exponentiel. L'oscillation collective est alors caractérisée par un spectre continu de fréquences, identique à celui obtenu par Van-Kampen ⁶⁾ à l'aide de modes discontinus (distributions). Appliquant donc la méthode de Case à la résolution de l'équation (5), la perturbation de densité est fractionnée en deux termes :

$$g(r,t) = g_+(r,t) + g_-(r,t) ,$$

tels que :

$$\begin{cases} g_+(r,t) = g(r,t), & t > 0 \\ g_+(r,t) = 0, & t < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} g_-(r,t) = 0, & t > 0 \\ g_-(r,t) = g(r,t), & t < 0 \end{cases} \quad (\text{III-6})$$

et

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} g_{\pm}(r, t \pm \epsilon) = g_0(r) .$$

Désignant les transformées de Laplace des expressions (6) par :

$$G_{\pm}(r,s) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_{\pm}(r,t) e^{-(s - i n \Omega_s)t} dt , \quad (\text{III-7})$$

les formules d'inversion s'écrivent :

$$\begin{aligned} g_+(r,t) &= \frac{e^{-i n \Omega_s t}}{2i\pi} \int_{-i\infty + \sigma_+}^{i\infty + \sigma_+} G_+(r,s) e^{st} ds , & \sigma_+ = \text{Re}(s) > 0 \\ g_-(r,t) &= \frac{e^{-i n \Omega_s t}}{2i\pi} \int_{-i\infty + \sigma_-}^{i\infty + \sigma_-} G_-(r,s) e^{st} ds , & \sigma_- = \text{Re}(s) < 0 . \end{aligned} \quad (\text{III-8})$$

Appliquant cette transformation de Laplace aux équations (4 et 5) on obtient une équation pour chacune des composantes $G_{\pm}(r,s)$:

$$(s - i n S r^2) G_{\pm}(r, s) = \pm g_0(r) - \frac{12^{n-1}}{\pi \Omega_{so}} D_{nn} \Delta \omega_{nn}^{\circ} \overline{z_{\pm}^n}(s) W(r) R_{nn}(r) , \quad (\text{III-9})$$

avec

$$\overline{z_{\pm}^n}(s) = \frac{\pi \Omega_{so}}{2^{n-1} D_{nn}} \int_0^{\infty} G_{\pm}(r, s) R_{nn}(r) r dr \quad (\text{III-10})$$

Extrayant la solution $G_{\pm}$ de (9) et la reportant dans (10), on obtient l'expression de $\overline{z_{\pm}^n}$ et, après inversion, celle de l'oscillation du moment $z^n(t)$ sous la forme :

$$\overline{z^n}(t) = \frac{e^{-i n \Omega_s t}}{2 i \pi} \left(\int_{\Gamma_+} \overline{z_+^n}(s) e^{st} ds + \int_{\Gamma_-} \overline{z_-^n}(s) e^{st} ds \right) \quad (\text{III-11a})$$

avec

$$\overline{z_{\pm}^n}(s) = \pm \frac{\pi \Omega_{so}}{2^{n-1} D_{nn}} \frac{\int_0^{\infty} \frac{g_0 R_{nn}}{s - i n S r^2} r dr}{1 + i \Delta \omega_{nn}^{\circ} \int_0^{\infty} \frac{W R_{nn}^2}{s - i n S r^2} r dr} \quad (\text{III-11b})$$

Les chemins d'intégration Γ_+ ($\text{Re } s > 0$) et Γ_- ($\text{Re } s < 0$) sont des droites parallèles à l'axe imaginaire du plan s , passant respectivement à droite et à gauche des singularités de $\overline{z_+^n}$ et $\overline{z_-^n}$ (Figure 23a). Dans le cas d'une dispersion synchrotronique S nulle, l'équation (11a) s'écrit simplement

$$\overline{z^n}(t) = \frac{\overline{z_0^n}}{2 i \pi} e^{-i n \Omega_s t} \left(\int_{\Gamma_+} \frac{e^{st} ds}{s + i \Delta \omega_{nn}^{\circ}} - \int_{\Gamma_-} \frac{e^{st} ds}{s + i \Delta \omega_{nn}^{\circ}} \right). \quad (\text{III-12})$$

Refermant les deux contours d'intégration autour du pôle $s_0 = -i \Delta \omega_{nn}^{\circ}$ (Figure 23b), et appliquant le théorème des résidus, on obtient

$$\overline{z^n}(t) = \overline{z_0^n} e^{-i(n \Omega_s + \Delta \omega_{nn}^{\circ})t}, \quad (\text{III-13})$$

ce qui redonne la définition de la déviation $\Delta \omega_{nn}^{\circ}$, égale à la déviation

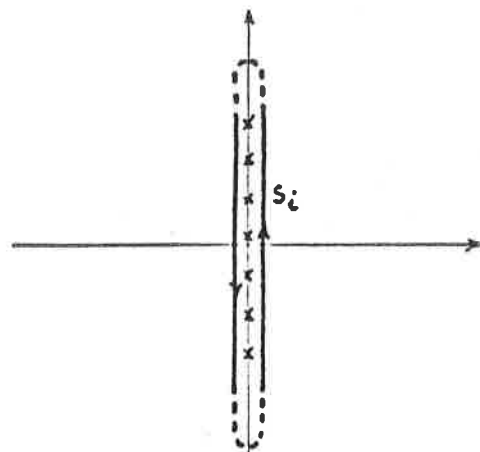
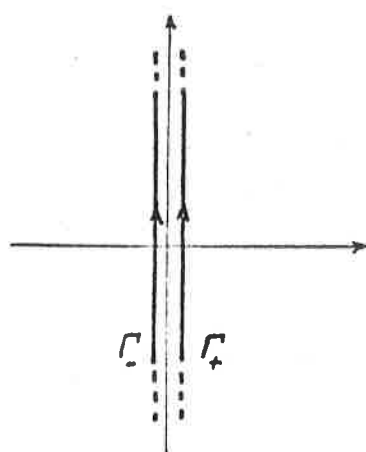
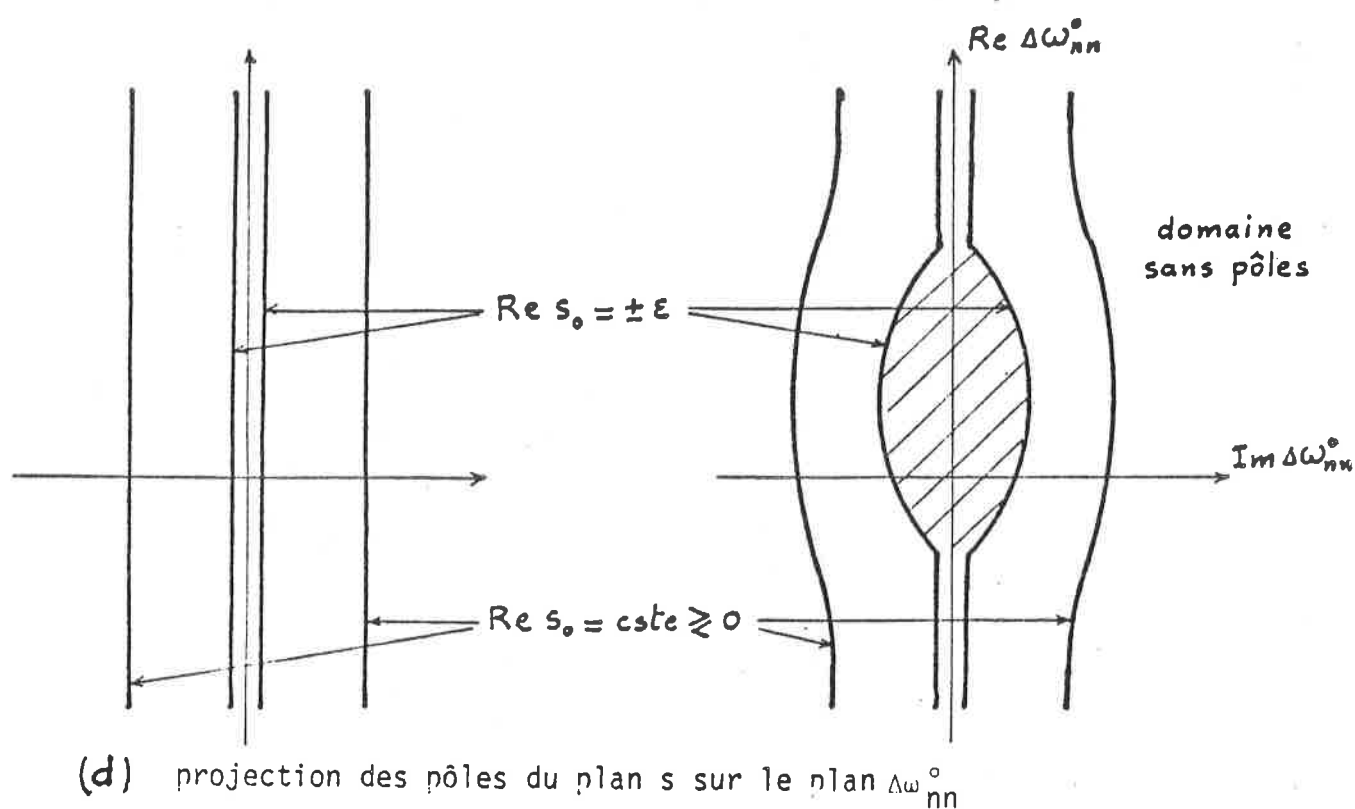
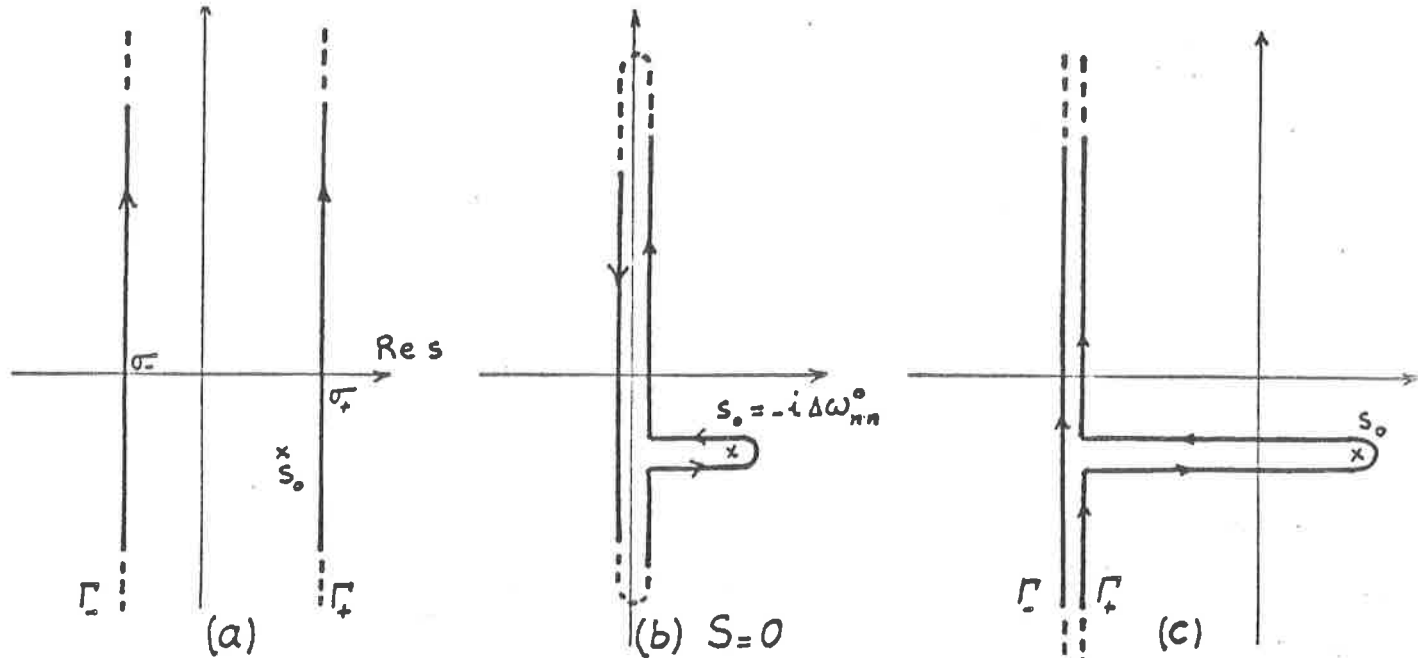


Figure 23 - Contours Γ_+ et Γ_- pour l'inversion d'une fonction

$$f(t) = \int_{\Gamma_+} F_+(s) e^{st} ds + \int_{\Gamma_-} F_-(s) e^{st} ds, \quad t > 0$$

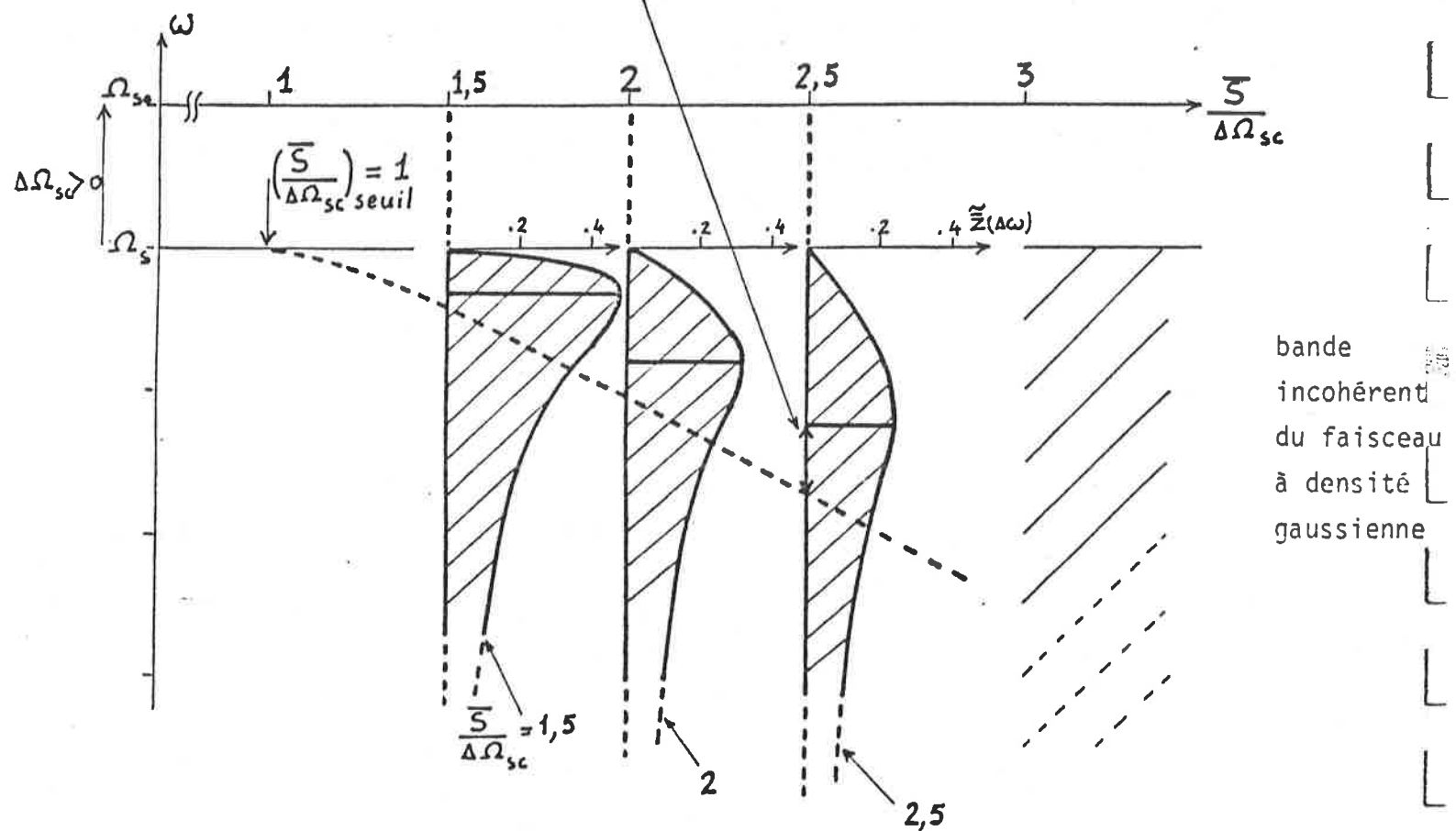
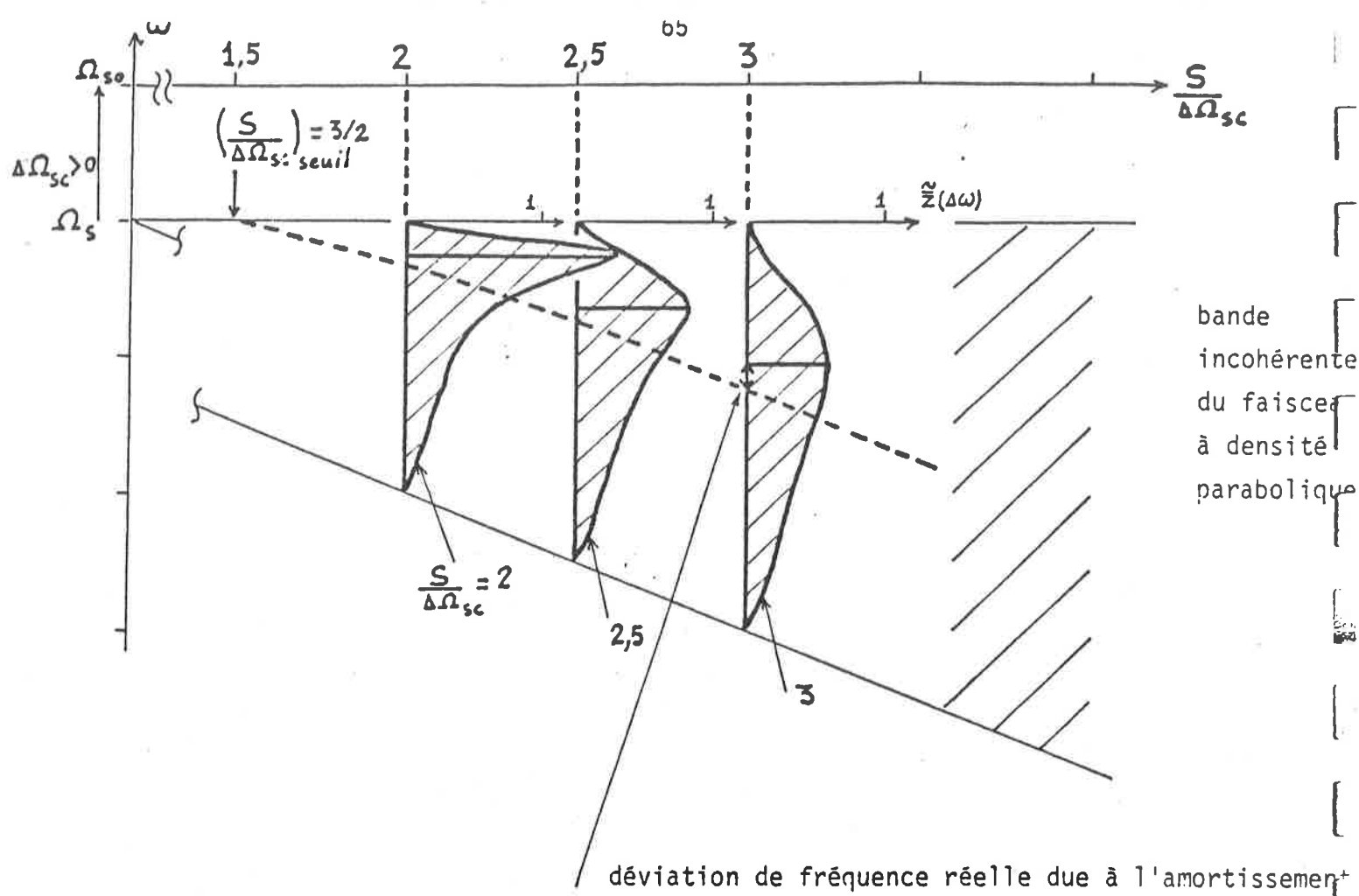


Figure 24 - Densité de fréquences collectives dans la bande des fréquences incohérentes pour le mode dipolaire (interaction $\propto z(t)$) et pour trois valeurs de la dispersion synchrotrique.

----- : partie réelle de la fréquence obtenue à l'aide de la relation de dispersion (I-54), lorsqu'on néglige l'amortissement du mode (Figure 9)

de fréquence collective $\omega - n\Omega_s$ pour $S = 0$. Cette oscillation du moment d'ordre n de la distribution est instable pour $\text{Re}(s_0) = \text{Im}(\Delta\omega_{nn}^0) > 0$ (cas d'une paroi de chambre à vide de résistivité non nulle).

III-1-2- Relation de dispersion et solution asymptotique du temps

En présence d'une dispersion S , la stabilité de l'oscillation collective est déterminée par les solutions s_0 de l'équation de dispersion

$$D_+(s) = 1 + i\Delta\omega_{nn}^0 \int_0^\infty \frac{W(r)R_{nn}^2 r dr}{s - i n S r^2} = 0 \quad , \quad (\text{III-14})$$

$$\text{Re}(s) = \text{Im}(\Delta\omega) > 0 \quad , \quad (\text{"prescription de Landau"})$$

ces solutions étant les pôles de $\overline{Z_+^n}(s)$. En effet, pour les temps $t > 0$ et en raison du terme e^{st} dans (11a), la contribution à l'oscillation $z^n(t)$ de l'intégrale sur le chemin Γ_- peut être rendue aussi faible que l'on veut en déviant Γ_- vers les grandes valeurs $\text{Re}(s)$ négatives. Le chemin Γ_+ étant dévié de la même manière tout en contournant le pôle s_0 (Figure 23c), la partie de Γ_+ parallèle à l'axe imaginaire apporte une contribution d'autant plus faible que le temps t est grand. La variation asymptotique de l'oscillation du moment $z^n(t)$ est donc bien déterminée par le pôle s_0 de $\overline{Z_+^n}(s)$. L'équation de dispersion (14) avec $n = 1$ (mode dipolaire) est identique à l'équation (I-51) dont nous avons décrit les propriétés au Chapitre I.

III-1-3- Oscillation collective possédant un spectre continu de fréquences

En fait, l'introduction par Case du contour d'inversion Γ_- n'est utile que si l'on recherche une solution $z^n(t)$ valable pour tous les temps t . Considérant donc à la fois les pôles de $\overline{Z_+^n}(s)$ du demi-plan $\text{Re}(s) > 0$ et ceux de $\overline{Z_-^n}(s)$ du demi-plan $\text{Re}(s) < 0$, la Figure 23d représente la projection de ces pôles sur le plan des déviations complexes $\Delta\omega_{nn}^0$. On constate que la projection des droites $\text{Re}(s) = \text{constante} \gg 0$,

ne couvre pas la totalité du plan $\Delta\omega_{nn}^{\circ}$: les droites $\text{Re}(s) = \pm \epsilon$ limitent un domaine du plan $\Delta\omega_{nn}^{\circ}$ à l'intérieur duquel Z_+^n et Z_-^n ne possèdent pas de pôles. Reconsidérant par exemple le cas d'une déviation $\Delta\omega_{nn}^{\circ}$ réelle (exemple de la Figure 9 avec $\Delta\omega_{11}^{\circ} = \Delta\omega_{sc}^{\circ}$), cette situation correspond au cas où la fréquence collective ω est à l'intérieur de la bande des fréquences incohérentes. En l'absence de pôles, les chemins Γ_+ et Γ_- peuvent tendre vers l'axe $\text{Re}(s) = 0$ respectivement par valeur positive et négative (Figure 23e) et, posant $s = -i\Delta\omega$, on obtient par (11b)

$$\overline{Z_{\pm}^n}(\Delta\omega) = \pm \frac{i\pi\Omega_{so}}{2^{n-1}\Omega_{nn}} \frac{X_o \mp iY_o}{nS - \Delta\omega_{nn}^{\circ}(X \mp iY)} \quad (\text{III-15})$$

$$X(\Delta\omega) = \text{V.P.} \int_0^{\infty} \frac{WR_{nn}^2 r dr}{r^2 + \frac{\Delta\omega}{nS}} \quad , \quad Y(\Delta\omega) = \frac{\pi}{2} (WR_{nn}^2) r^2 = -\frac{\Delta\omega}{nS}$$

$$X_o(\Delta\omega) = \text{V.P.} \int_0^{\infty} \frac{g_o R_{nn} r dr}{r^2 + \frac{\Delta\omega}{nS}} \quad , \quad Y_o(\Delta\omega) = \frac{\pi}{2} (g_o R_{nn}) r^2 = -\frac{\Delta\omega}{nS}$$

V.P. : valeur principale de l'intégrale.

Ces expressions de $\overline{Z_+^n}$ et $\overline{Z_-^n}$ étant conjuguées, leur somme dans (11a) est réelle et l'oscillation $\overline{Z^n}(t)$ est décrite par l'intégrale de Fourier :

$$\overline{Z^n}(t) = e^{-in\Omega_s t} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{Z^n}(\Delta\omega) e^{-i\Delta\omega t} d\Delta\omega \quad (\text{III-16})$$

$$\overline{Z^n}(\Delta\omega) = \frac{\Omega_{so}}{2^{n-1}\Omega_{nn}} \cdot \frac{\Delta\omega_{nn}^{\circ} X_o Y_o + Y_o (nS - \Delta\omega_{nn}^{\circ} X)}{(nS - \Delta\omega_{nn}^{\circ} X)^2 + (\Delta\omega_{nn}^{\circ} Y)^2}$$

Cette fonction $\overline{Z^n}(\Delta\omega)$ représente une densité continue de fréquences collectives $\omega = n\Omega_s + \Delta\omega$, définie sur l'intervalle de fréquences correspondant à la bande des fréquences incohérentes, car les

fonctions $Y(\Delta\omega)$ et $Y_0(\Delta\omega)$ (15) sont nulles à l'extérieur de cette bande. En particulier la fonction $Y_0(\Delta\omega)$, relative à la perturbation initiale $g_0(r)$, représente la limite de cette densité pour une interaction nulle ($\Delta\omega_{nn}^0 = 0$). Dans le cas où la perturbation initiale est un mode pur :

$$g_0(r) = W(r)R_{nn}(r) \quad , \quad X = X_0, \quad Y = Y_0,$$

la densité (16) des fréquences collectives admet l'expression plus simple :

$$\frac{\sim}{z^n(\Delta\omega)} = \frac{\overline{z^n}_0}{(nS - \Delta\omega_{nn}X)^2 + (\Delta\omega_{nn}Y)^2} \quad , \quad \text{(III-17)}$$

$$\overline{z^n}_0 = \overline{z^n}(t = 0)$$

Le cas de la Figure 24 se rapporte à une distribution stationnaire initialement déplacée de son centre d'équilibre sur l'axe longitudinal (par exemple en variant brusquement la phase synchrone ϕ_s). En l'absence de dispersion synchrotronique la distribution oscillerait ensuite selon le mode dipolaire rigide avec une amplitude constante, à la fréquence $\omega = \Omega_s + \Delta\omega_{11}$ réelle et discrète. S'étant placé dans l'approximation de l'interaction synthétique, le champ de charge d'espace ne dépend que de la position du barycentre $\overline{z}(t)$, et la fréquence collective entre dans la bande incohérente pour un taux de dispersion supérieur au seuil (I-56). La Figure 24 représente, pour trois valeurs de la dispersion excédant ce seuil, la densité de fréquences collectives (expression (17) avec $n = 1$) dans la bande de fréquences incohérentes des faisceaux à densité parabolique et gaussienne. Cette densité continue de fréquences réelles caractérise une oscillation du barycentre qui est amortie proportionnellement à la largeur du spectre. Nous avons également représenté l'approximation de la fréquence collective par une fréquence réelle discrète, obtenue précédemment à l'aide de la relation de dispersion en négligeant l'amortissement du mode (expression I-54 et Figure 9). On note une faible déviation de cette fréquence par rapport

au pic du spectre continu, qui croît cependant en fonction de l'amortissement du mode, comme dans le cas d'un simple oscillateur amorti.

III-2- Application de la méthode de perturbation à l'interaction exacte $\propto \frac{\partial \lambda}{\partial z}$.

Lorsqu'en deuxième partie nous avons envisagé le cas de l'interaction locale $\propto \frac{\partial \lambda}{\partial z}$, nous avons montré que le noyau intégral $G_n(r, r')$ de l'équation de Vlasov (2) admet la forme générale (II-18) :

$$G_n(r, r') = \sum_{i, j} {}^0M_{ij}^n R_{in}(r) R_{jn}(r') \quad . \quad (\text{III-18})$$

La recherche des solutions de l'équation de Vlasov sous forme de série :

$$g(r, t) = R(r) e^{-i\omega t} \quad , \quad R(r) = W(r) \sum_m a_m R_{mn}(r) \quad , \quad (\text{III-19})$$

nous a alors conduit à la résolution du problème homogène à valeurs propres (II-38) :

$$([{}^0M^n] + [{}^1M^n] - \frac{\Delta\omega}{n\Delta\Omega_{sc}} [I]) \vec{a} = 0 \quad . \quad (\text{III-20})$$

Considérant maintenant le problème à valeur initiale (6), lorsqu'on effectue un développement en série de la fonction transformée de $g_{\pm}(r, t)$ (7) sous la forme :

$$G_{\pm}(r, s) = W(r) \sum_m A_{m\pm}(s) R_{mn}(r) \quad , \quad (\text{III-21})$$

$$G_0(r) = W(r) \sum_k a_{k0} R_{kn}(r) \quad ,$$

la résolution de l'équation de Vlasov (2) conduit simplement au problème

inhomogène associé à (20), soit :

$$([{}^0M^n] + [{}^1M^n] - \frac{is}{n\Delta\Omega_{sc}} [I]) \vec{A}_{\pm}(s) = \pm \frac{\vec{a}_0}{in\Delta\Omega_{sc}}, \quad (\text{III-22})$$

$$s = -i\Delta\omega = -i(\omega - n\Omega_s)$$

Connaissant les solutions du problème homogène (20), en particulier le spectre des fréquences propres $\Delta\omega_{mn}$, et également le spectre $\Delta\omega_{mn}^1$ de la matrice de dispersion $[{}^1M^n]$, on se propose d'établir deux types de solutions équivalentes pour le problème inhomogène (22).

III-2-1- Solution du problème à valeur initiale décrite par la densité du spectre des fréquences collectives

La résolution de l'équation (22) peut être obtenue en recherchant la solution (21) sous la forme d'un développement par rapport aux fonctions propres $Q_{mn}(r)$ du problème homogène (20) :

$$G_{\pm}(r,s) = W(r) \sum_n B_{m\pm}(s) Q_{mn}(r) \quad (\text{III-23})$$

$$g_0(r) = W(r) \sum_k b_{ko} Q_{kn}(r)$$

Appliquant les propriétés (II-25 à II-27) des vecteurs propres $\vec{U}_m$, les vecteurs $\vec{A}(s)$ et $\vec{B}(s)$ sont reliés par :

$$\begin{aligned} \vec{A}_{\pm}(s) &= \sum_k B_{k\pm}(s) \vec{U}_k \quad (a) \\ \vec{a}_0 &= \sum_k b_{ko} \vec{U}_k \quad (b) \end{aligned} \quad (\text{III-24})$$

Reportant ces expressions dans l'équation (22) et appliquant la propriété de définition (II-25) d'un vecteur propre, on obtient :

$$\sum_k (s + i\Delta\omega_{kn}) B_{k\pm} \vec{U}_k = \pm \sum_k b_{ko} \vec{U}_k \quad . \quad (\text{III-25})$$

Les vecteurs propres $\vec{U}_k$ étant linéairement indépendants car orthogonaux, il résulte de cette dernière équation que les coefficients B_k sont reliés aux b_{ko} par :

$$B_{k\pm}(s) = \pm \frac{b_{ko}}{s + i\Delta\omega_{kn}} \quad , \quad (\text{III-26})$$

et, inversant (24b), sont reliés aux a_{mo} par :

$$B_{k\pm}(s) = \pm \frac{\sum_m U_{mk} a_{mo}}{s + i\Delta\omega_{kn}} \quad . \quad (\text{III-27})$$

Reportant cette expression dans (24a), on obtient la solution de l'équation inhomogène (22) sous la forme :

$$A_{j\pm}(s) = \pm \sum_{k,m} \frac{U_{jk} U_{mk} a_{mo}}{s + i\Delta\omega_{kn}} \quad . \quad (\text{III-28})$$

Remarque sur la fonction de Green : Cette méthode de résolution d'une équation matricielle inhomogène est analogue à celle de l'équation différentielle inhomogène

$$L \cdot u(x) - \lambda u(x) = f(x) \quad , \quad (\text{III-29})$$

à l'aide d'un développement de $u(x)$ et $f(x)$ par rapport aux fonctions propres $u_n(x)$ de l'opérateur L :

$$L \cdot u_n(x) = \lambda_n u_n(x) \quad . \quad (\text{III-30})$$

On sait que la solution du problème (29) s'écrit ^{25,27)} :

$$u(x) = \int G(x|x') f(x') dx' \quad , \quad (\text{III-31})$$

où $G(x|x')$, fonction de Green du problème inhomogène, admet le développement bilinéaire

$$G(x|x', \lambda) = \sum_n \frac{u_n(x)u_n(x')}{\lambda_n - \lambda} \quad , \quad (\text{III-32})$$

et est solution de l'équation

$$L \cdot G - \lambda G = \delta(x - x') \quad . \quad (\text{III-33})$$

Récrivant la solution (28) sous une forme analogue à (31) :

$$A_{j\pm}(s) = \pm \sum_m a_{m0} G(m|j, s) \quad , \quad (\text{III-34})$$

la fonction

$$G(m|j, s) = \sum_k \frac{U_{jk} U_{mk}}{s + i\Delta\omega_{kn}} \quad , \quad (\text{III-35})$$

peut être considérée comme étant une fonction de Green à variable discrète, solution du problème inhomogène associé à (22) :

$$in\Delta\Omega_{sc} \sum_m ({}^0M_{\ell m}^n + {}^1M_{\ell m}^n) G(m|j, s) + sG(\ell|j, s) = \delta_{\ell j} \quad , \quad (\text{III-36})$$

comme on peut le vérifier en reportant (35) dans (36).

Nous avons vu que pour une matrice d'interaction $[{}^0M^n]$ à valeurs propres $\Delta\omega_{jn}^0$ réelles (impédance de paroi purement réactive), les déviations de fréquences propres $\Delta\omega_{jn}$ calculées en présence de dispersion synchrotronique sont également réelles. Les solutions $A_{j\pm}(s)$ (28) ou (34) comportent donc une séquence infinie de pôles $s = -i\Delta\omega_{kn}$ purement imaginaires, et l'inversion de Laplace peut s'effectuer à l'aide du contour de la Figure 23f. En particulier le coefficient $A_{n\pm}(s)$ décrit l'oscillation du moment d'ordre n de la distribution, soit en reportant (21) dans (10) :

$$\overline{z}_{\pm}^n(s) = \frac{\pi \Omega_{so}}{2^{n-1} D_{nn}} A_{n\pm}(s)$$

et, après inversion, on obtient :

$$\overline{z}^n(t) = \frac{\pi \Omega_{so}}{2^{n-1} D_{nn}} \sum_{k,m} U_{nk} U_{mk} a_{mo} e^{-i(n\Omega_s + \Delta\omega_{kn})t} \quad (\text{III-37})$$

Lorsque la perturbation initiale $g_o(r)$ est le mode pur le plus cohérent $m = n$, il vient :

$$\begin{aligned} \vec{a}_o &= (1, 0, 0, \dots) \\ \overline{z}^n(t) &= \overline{z}_o^n \sum_k U_{nk}^2 e^{-i(n\Omega_s + \Delta\omega_{kn})t} \end{aligned} \quad (\text{III-38})$$

Comparant cette expression du moment $\overline{z}^n(t)$ à l'expression correspondante obtenue en (16) et (17) sous la forme d'une intégrale de Fourier, avec une interaction simplifiée $\propto z^n(t)$, on peut souligner l'étonnante simplicité de l'expression (38), dont la forme reste aussi compacte pour l'interaction exacte $\propto \frac{\partial \lambda}{\partial z}$ que pour l'interaction simplifiée. Cependant on doit également remarquer que, s'agissant d'une méthode de perturbation nécessairement limitée dans ses applications à un nombre fini de fréquences propres $\Delta\omega_{kn}$, la somme (38) n'est que l'approximation discrète d'une intégrale de Fourier. Associant à chaque fréquence propre $\Delta\omega_{kn}$ l'amplitude spectrale U_{nk}^2 , un histogramme ²⁴⁾ de la densité du spectre continu des fréquences collectives peut être obtenu à l'aide de l'approximation :

$$\frac{\sim}{\overline{z}^n(\Delta\omega)} \approx \frac{1}{2} \frac{U_{nk}^2 + U_{n,k+2}^2}{\Delta\omega_{k+2,n} - \Delta\omega_{kn}} \quad , \quad \Delta\omega_{kn} < \Delta\omega < \Delta\omega_{k+2,n} \quad (\text{III-39})$$

L'histogramme obtenu à l'aide de 20 fréquences propres $\Delta\omega_{kn}$ est comparé sur la Figure 25 à la densité continue de fréquences collectives d'expression (17). L'approximation ainsi obtenue est

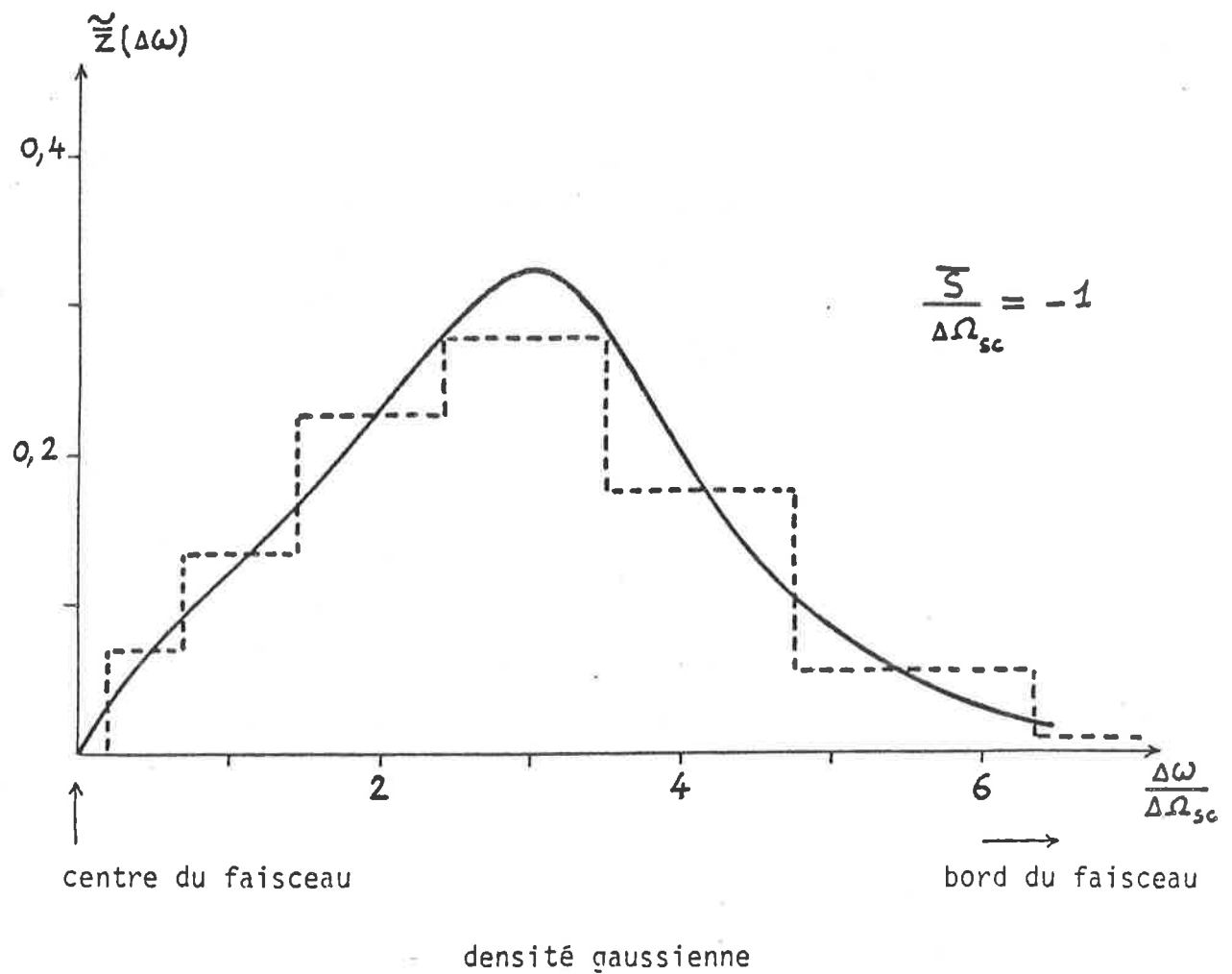
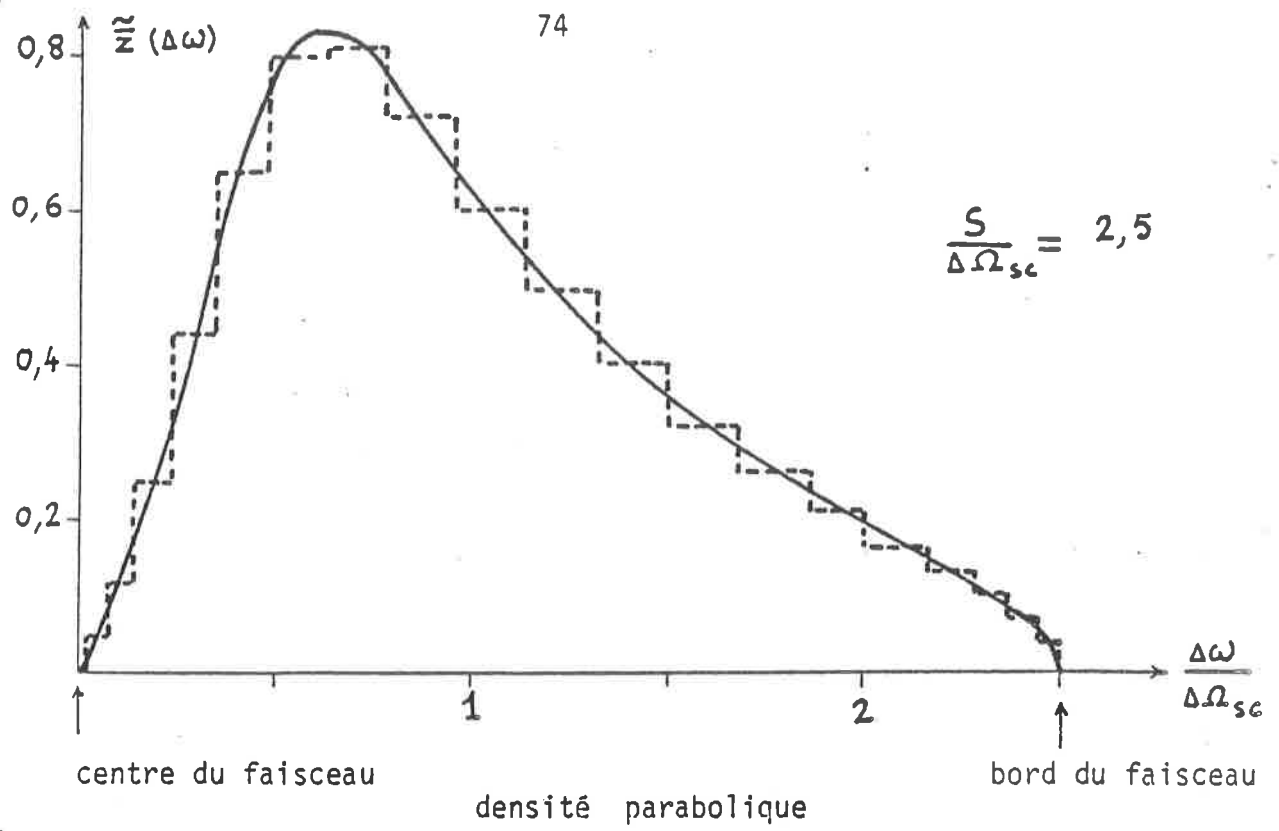


Figure 25 - Densité continue (17) et histogramme (39) du spectre de fréquence du mode dipolaire, dans la bande incohérente, pour l'interaction synthétique $\bar{z}(t)$

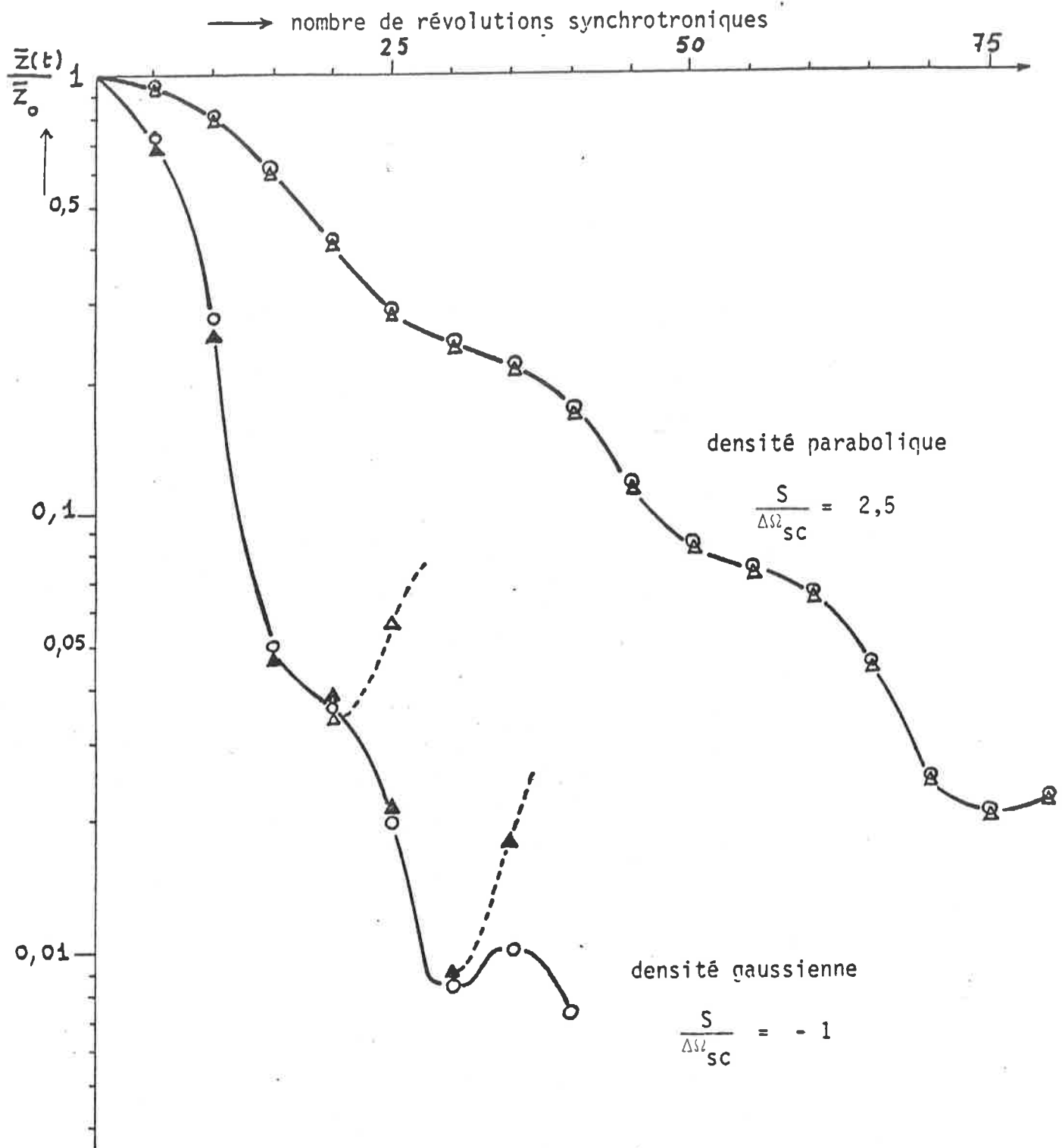


Figure 26 - Variation d'amplitude de l'oscillation du barycentre, correspondant aux spectres de fréquences de la Figure 25, obtenue par

° l'intégrale de Fourier (16)

△ la somme discontinue (38) avec 20 fréquences propres $\Delta\omega_{kn}$

▲ la somme discontinue (38) avec 40 fréquences propres $\Delta\omega_{kn}$

meilleure dans le cas parabolique, où les 20 fréquences contribuent à la construction du spectre, que dans le cas gaussien où à peine la moitié des fréquences apporte une contribution effective. Comme nous l'avons déjà signalé, cette différence entre les deux distributions tient à ce qu'un grand nombre de fréquences très dispersées sont représentatives de la queue de la distribution gaussienne. La Figure 26 représente l'amortissement en fonction du temps de l'oscillation du barycentre $\bar{z}(t)$, dont la fréquence est donnée par les spectres de la Figure 25. Pour la raison que nous venons de rappeler, la somme (38) cesse de coïncider avec l'intégrale de Fourier (16) beaucoup plus vite dans le cas gaussien que dans le cas parabolique.

III-2-2- Solution du problème à valeur initiale, décrite par une relation de dispersion

Un deuxième type de solution pour l'équation inhomogène (22) peut être obtenu à partir d'un développement de cette solution par rapport aux fonctions propres $Q_{mn}^1(r)$ de la matrice de dispersion $[^1M^n]$. Pour cela il suffirait de reprendre, pour ce nouveau développement, les calculs conduisant de (22) à (28). Toutefois, les calculs étant sensiblement simplifiés lorsqu'on utilise les propriétés de la fonction de Green, nous récrivons l'équation (22) en traitant l'interaction (matrice $[^0M^n]$) comme une inhomogénéité :

$$([^1M^n] - \frac{is}{n\Delta\Omega_{sc}} [I]) \vec{A}_{\pm}(s) = \pm \frac{\vec{a}_0}{in\Delta\Omega_{sc}} - [^0M^n] \vec{A}_{\pm}(s) \quad (\text{III-40})$$

Désignant par $\vec{U}_k^1$ les vecteurs propres de la matrice de dispersion $[^1M^n]$, associés aux valeurs propres $\Delta\omega_{kn}^1$, nous appliquons les propriétés (35) et (36) à la fonction de Green

$$G_1(j|k, s) = \sum_{\ell} \frac{U_{j\ell}^1 U_{k\ell}^1}{s + i\Delta\omega_{\ell n}^1} \quad (\text{III-41})$$

solution de l'équation

$$in\Delta\Omega_{sc} \sum_j {}^1M_{ij}^n G_1(j|k,s) + sG_1(1|k,s) = \delta_{1k} \quad (\text{III-42})$$

Les solutions de l'équation (40) s'expriment à l'aide de la fonction de Green d'une manière analogue à (34) sous la forme :

$$A_{k\pm}(s) = \sum_m (\pm a_{m0} - in\Delta\Omega_{sc} \sum_j {}^0M_{mj}^n A_{j\pm}) G_1(m|k,s) \quad (\text{III-43})$$

Résolvant cette équation par rapport à $\vec{A}(s)$, on écrit :

$$\sum_j (in\Delta\Omega_{sc} \sum_m {}^0M_{mj}^n G_1(m|k,s) + \delta_{jk}) A_{j\pm} = \pm \sum_m a_{m0} G_1(m|k,s) \quad (\text{III-44})$$

Désignant le déterminant de ce système algébrique par

$$D(s) = \text{DET} [in\Delta\Omega_{sc} \sum_m {}^0M_{mj}^n G_1(m|k,s) + \delta_{jk}] \quad (\text{III-45})$$

les solutions s'écrivent

$$A_{k\pm}(s) = \frac{D_{k0}(s)}{D(s)} \quad (\text{III-46})$$

où le déterminant D_{k0} est formé en remplaçant la $k^{\text{ième}}$ colonne dans (44) par le vecteur colonne du second membre. Lorsqu'enfin on effectue l'inversion de Laplace de $\vec{A}_{\pm}(s)$, les fréquences propres de l'oscillation de densité $g(r,t)$ sont déterminées par les pôles de $\vec{A}_{\pm}(s)$, ce qui nous donne une relation de dispersion pour les fréquences $s = -i\Delta\omega$:

$$D(\Delta\omega) = \text{DET} [n\Delta\Omega_{sc} \sum_m {}^0M_{mj}^n G_1(m|k,\Delta\omega) + \delta_{jk}] = 0 \quad (\text{III-47})$$

avec

$$G_1(1|k,\Delta\omega) = \sum_{\ell} \frac{U_{1\ell}^1 U_{k\ell}^1}{\Delta\omega_{\ell n} - \Delta\omega} \quad (\text{III-48})$$

Lorsque la matrice d'interaction est obtenue directement sous forme diagonale, comme c'est le cas pour le faisceau à densité parabolique,

$${}^{\circ}M_{ij}^n = \frac{\Delta\omega_{in}^{\circ}}{n\Delta\Omega_{sc}} \delta_{ij} ,$$

l'équation de dispersion (47) s'écrit plus simplement

$$O(\Delta\omega) = \text{DET}[\Delta\omega_{jn}^{\circ} G_1(j|k, \Delta\omega) + \delta_{jk}] = 0 \quad . \quad (\text{III-49})$$

En l'absence de dispersion des fréquences incohérentes, $\Delta\omega_{ln}^1 \equiv 0$, les vecteurs propres étant orthonormés comme en (II-26) la fonction de Green se réduit à

$$G_1(m|k, \Delta\omega) = -\frac{1}{\Delta\omega} \sum_{\ell} U_{m\ell}^1 U_{k\ell}^1 = -\frac{\delta_{km}}{\Delta\omega} , \quad (\text{III-50})$$

et l'équation de dispersion (47) se ramène au problème à valeurs propres (20) où la dispersion est nulle :

$$\text{DET} \left([{}^{\circ}M^n] - \frac{\Delta\omega}{n\Delta\Omega_{sc}} [I] \right) = 0 , \quad (\text{III-51})$$

avec pour solutions $\Delta\omega \equiv \Delta\omega_{jn}^{\circ}$, les valeurs propres de la matrice d'interaction.

En présence d'une dispersion des fréquences $\Delta\omega_{ln}^1$, la fonction G_1 dans (47) et (49) établit un couplage entre les différents modes qui, pour une dispersion nulle, auraient pour fréquences propres $\Delta\omega_{jn}^{\circ}$, $j = n, n+2, \dots$.

III-3- Applications de la relation de dispersion

III-3-1- Situation des fréquences collectives par rapport à la bande des fréquences incohérentes

Nous disposons maintenant de deux formulations différentes pour ce même problème, c'est-à-dire :

- le problème à valeurs propres (20)

$$\text{DET} ([{}^0M^n] + [{}^1M^n] - \frac{\Delta\omega}{n\Delta\Omega_{sc}} [I]) = 0 \quad , \quad (\text{III-52})$$

- la relation de dispersion (47) (ou sa forme simplifiée (49))

$$\text{DET}(n\Delta\Omega_{sc} [{}^0M^n] [G(\Delta\omega)] + [I]) = 0 \quad , \quad (\text{III-53})$$

où la matrice $[G]$ d'éléments

$$G_{ik}(\Delta\omega) = \sum_{\ell} \frac{U_{i\ell}^1 U_{K\ell}^1}{\Delta\omega_{\ell n}^1 - \Delta\omega} \quad (\text{III-54})$$

est formée par les vecteurs colonnes associés à la fonction de Green (48), ce qui constitue un simple changement de notation. Pour une interaction et une dispersion données, la forme (52) est visiblement la mieux adaptée au calcul des fréquences collectives $\Delta\omega$, et c'est ce problème que nous avons résolu en seconde partie. La résolution de (53) par rapport à la fréquence $\Delta\omega$, qui apparaît au dénominateur des éléments de matrice G_{ik} , serait rendue plus difficile. Cependant, pour une interaction simplifiée à deux fréquences propres $\Delta\omega_{jn}^0$ (matrice $[{}^0M^n]$ de rang 2) et pour une dispersion S donnée, nous avons pu vérifier que les solutions $\Delta\omega$ de (52) et (53) coïncident.

Par contre la relation de dispersion (53) est adaptée à la résolution du problème inverse : pour une déviation de fréquence collective $\Delta\omega$ donnée, quelles sont les solutions $\Delta\omega_{jn}^0/S$ du problème ? En particulier, en demandant à $\Delta\omega$ de prendre des valeurs réelles, nous pouvons obtenir les solutions $\Delta\omega_{jn}^0/S$ représentant la limite de stabilité $\text{Im}\Delta\omega = 0$ dans le plan des fréquences complexes $\Delta\omega_{jn}^0/S = U + iV$. C'est précisément de cette manière que l'on a résolu la forme intégrale de

l'équation de dispersion (I-51) (Figure 8).

Fréquence collective aux limites de la bande de fréquences incohérentes

L'amortissement de Landau d'un mode s'exerçant lorsque la fréquence collective est à l'intérieur de la bande de fréquences incohérentes (Figure 24) les limites de stabilité du faisceau à densité parabolique sont obtenues en résolvant (53) pour :

$$\begin{aligned} \Delta\omega &= 0, & \Delta\Omega_{sc} &> 0 \quad (\text{avant la transition}) \\ \text{et} \quad \Delta\omega &= -S, & \Delta\Omega_{sc} &< 0 \quad (\text{après la transition}) \end{aligned} \quad (\text{III-55})$$

La fréquence collective est respectivement égale à la fréquence synchrotronique des particules appartenant au centre et au bord du faisceau.

Fréquence collective à l'intérieur de la bande incohérente : passage à la limite d'un spectre de dispersion $\Delta\omega_{\ell n}^1$ dense

La déviation de fréquence collective $\Delta\omega$ étant un paramètre réel de l'équation de dispersion (53), nous lui faisons parcourir le spectre de dispersion $\Delta\omega_{\ell n}^1$ en lui affectant successivement les valeurs médianes :

$$\Delta\omega = (\Delta\omega_{\alpha n}^1 + \Delta\omega_{\alpha+2, n}^1)/2, \quad \alpha = n, n+2, \dots \quad (\text{III-56})$$

Effectuant le passage à la limite d'un spectre $\Delta\omega_{\ell n}^1$ dense, la somme discrète (54) peut être traitée comme une intégrale comportant un pôle en écrivant :

$$G_{1k}(\Delta\omega) = \sum_{\ell} \frac{U_{1\ell}^1 U_{k\ell}^1}{\Delta\omega_{\ell n}^1 - \Delta\omega} + i \frac{\pi}{2} \frac{U_{1\alpha}^1 U_{k\alpha}^1 + U_{1, \alpha+2}^1 U_{k, \alpha+2}^1}{\Delta\omega_{\alpha+2, n}^1 - \Delta\omega_{\alpha n}^1} \quad (\text{III-57})$$

Dans le premier terme de (57), la "variable" $\Delta\omega_{\ell n}^1$ approche le "pôle" $\Delta\omega$ symétriquement par valeurs positive et négative :

$$\Delta\omega_{\ell n}^1 - \Delta\omega = \begin{cases} (\Delta\omega_{\alpha n}^1 - \Delta\omega_{\alpha+2, n}^1)/2 & , \quad \text{pour } \ell = \alpha \\ - (\Delta\omega_{\alpha n}^1 - \Delta\omega_{\alpha+2, n}^1)/2 & , \quad \text{pour } \ell = \alpha + 2 \end{cases} \quad (\text{III-58})$$

ce qui équivaut à prendre la valeur principale d'une intégrale. Le second terme de (57) représente la contribution moyenne du "pôle" sur l'intervalle de fréquence $[\Delta\omega_{\alpha n}^1, \Delta\omega_{\alpha+2, n}^1]$ considéré.

III-3-2- Diagramme de stabilité du mode dipolaire pour l'interaction simplifiée $\propto \bar{z}(t)$

C'est le cas que nous avons envisagé en première partie (relation de dispersion I-54 et seuils de stabilité de la Figure 8), où le spectre de la matrice d'interaction est simplifié de façon à ne conserver que la fréquence propre du mode dipolaire rigide :

$${}^oM_{1j}^1 = \frac{\Delta\omega_{11}^o}{\Delta\Omega_{sc}} \delta_{11} \delta_{j1} \quad (\text{III-59})$$

Ce mode est donc découplé de tout autre mode collectif et, le déterminant de la relation de dispersion (53) se réduisant à un seul terme, on obtient :

$$1 + \frac{\Delta\omega_{11}^o}{S} G_{11} \left(\frac{\Delta\omega}{S} \right) = 0 \quad , \quad (\text{III-60})$$

avec

$$G_{11} \left(\frac{\Delta\omega}{S} \right) = \sum_{\ell} \frac{(U_{1\ell}^1)^2}{\frac{\Delta\omega_{\ell 1}^1}{S} - \frac{\Delta\omega}{S}} + 1 \frac{\pi}{2} \frac{(U_{1\alpha}^1)^2 + (U_{1, \alpha+2}^1)^2}{\frac{\Delta\omega_{\alpha+2, 1}^1}{S} - \frac{\Delta\omega_{\alpha 1}^1}{S}} ,$$

$$\Delta\omega = \frac{1}{2} (\Delta\omega_{\alpha 1}^1 + \Delta\omega_{\alpha+2, 1}^1) , \quad -S < \Delta\omega < 0$$

Nous devons donc comparer cette relation de dispersion à la forme intégrale (I-51) ou encore (III-14 avec $s = -i\Delta\omega$) :

$$1 - \frac{\Delta\omega_{11}^0}{S} \int_0^\infty \frac{W(r)R_{11}^2 r dr}{r^2 + \frac{\Delta\omega}{S}} = 0, \quad -S < \Delta\omega < 0 \quad (\text{III-61})$$

Outre la similitude de forme entre les deux relations de dispersion, on remarque que les composantes de vecteurs propres $U_{1\ell}^1$ dans la somme G_{11} tiennent le rôle de la fonction propre $W(r)R_{11}(r)$ dans l'intégrale de dispersion. Vecteurs propres et fonctions propres étant orthonormés, on retrouve dans les deux cas la définition de la déviation $\Delta\omega_{11}^0$ relative à une dispersion nulle :

$$\Delta\omega = \Delta\omega_{11}^0 \quad \text{pour} \quad S = 0, \quad \Delta\omega_{\ell 1}^1 \equiv 0 \quad (\text{III-62})$$

L'histogramme (60) du seuil de stabilité $\text{Im}\Delta\omega = 0$ dans le plan des fréquences complexes $\Delta\omega_{11}^0$, et sa forme continue (61) sont comparés sur la Figure 27. Le spectre de dispersion est approché par 20 fréquences $\Delta\omega_{\ell 1}^1$ pour le faisceau à densité parabolique, et 40 fréquences $\Delta\omega_{\ell 1}^1$ pour le cas gaussien, ce dernier spectre présentant un plus grand étalement.

III-3-3- Diagrammes de stabilité des modes collectifs pour l'interaction exacte $\propto \frac{\partial \lambda}{\partial z}$.

Désirant, comme précédemment, obtenir les diagrammes de stabilité du plan U,V, déjà défini en (I-54) par :

$$U + iV = \frac{\Delta\omega_{11}^0}{S}, \quad (\text{III-63})$$

nous reprenons la relation de dispersion (53) en changeant $\Delta\omega_{sc} = \Delta\omega_{11}^0$, déviation de fréquence réelle du mode dipolaire rigide pour une dispersion nulle et une impédance de paroi purement réactive, en déviation

complexe caractérisant une instabilité due, par exemple, à la faible résistivité de la paroi. Posant :

$$\Lambda = - \frac{S}{\Delta\omega_{11}^0} = - \frac{1}{U + iV} \quad , \quad (\text{III-64})$$

la résolution de l'équation de dispersion (53) se ramène encore à la résolution d'un problème à valeurs propres, mais cette fois par rapport à la variable Λ :

$$D\left(\frac{\Delta\omega}{nS}, \Lambda\right) = \text{DET}([{}^0M^n][G(\frac{\Delta\omega}{nS})] - \Lambda[I]) = 0 \quad , \quad (\text{III-65})$$

où la matrice à diagonaliser est maintenant une matrice complexe, non hermitique, du fait des éléments $G_{1k}(\frac{\Delta\omega}{nS})$ d'expression (57).

Le rang r_1 de la matrice $[G]$, égal au rang de la matrice de dispersion $[{}^1M^n]$, peut être choisi aussi grand que le permettent les contraintes d'espace-mémoire et de temps de calcul, dans la diagonalisation numérique conduisant aux valeurs propres $\Delta\omega_{\ell n}^1$ et vecteurs propres $\vec{U}_{\ell}^1$ de cette matrice. Ce calcul devant être fait une seule fois par distribution de particules, les éléments (57) de la matrice $[G]$ doivent être ensuite calculés aux (r_1-1) valeurs médianes (56) de la fréquence collective $\Delta\omega$ dans le spectre de dispersion $\Delta\omega_{\ell n}^1$. Le rang r_0 de la matrice d'interaction $[{}^0M^n]$ est alors imposé égal à r_1 . Cependant, sachant que ses valeurs propres $\Delta\omega_{\ell n}^0$, $\ell = n, n+2, \dots$, tendent vers zéro pour $\ell \gg n$ (Figure 12), cette matrice peut être simplifiée en ne conservant qu'un petit nombre d'éléments non nuls. Prenant l'exemple du faisceau à densité parabolique, où l'interaction de mode dipolaire est simplifiée de façon à ne conserver que les deux fréquences propres $\Delta\omega_{11}^0$, $\Delta\omega_{31}^0$ caractérisant les deux modes les plus cohérents, la simplification introduite dans le produit de matrices figurant à la relation de dispersion (65) est indiquée sur la Figure 28a. Ce schéma montre que, pour cet exemple, on doit en fait se limiter à calculer seulement 2×2 éléments de la matrice $[G]$, qui dépendent néanmoins par (57) des 20×20 éléments de la matrice de dispersion. La relation de dispersion (65) possède deux valeurs propres non nulles Λ_{11} et Λ_{31} , dont la variation en fonction de

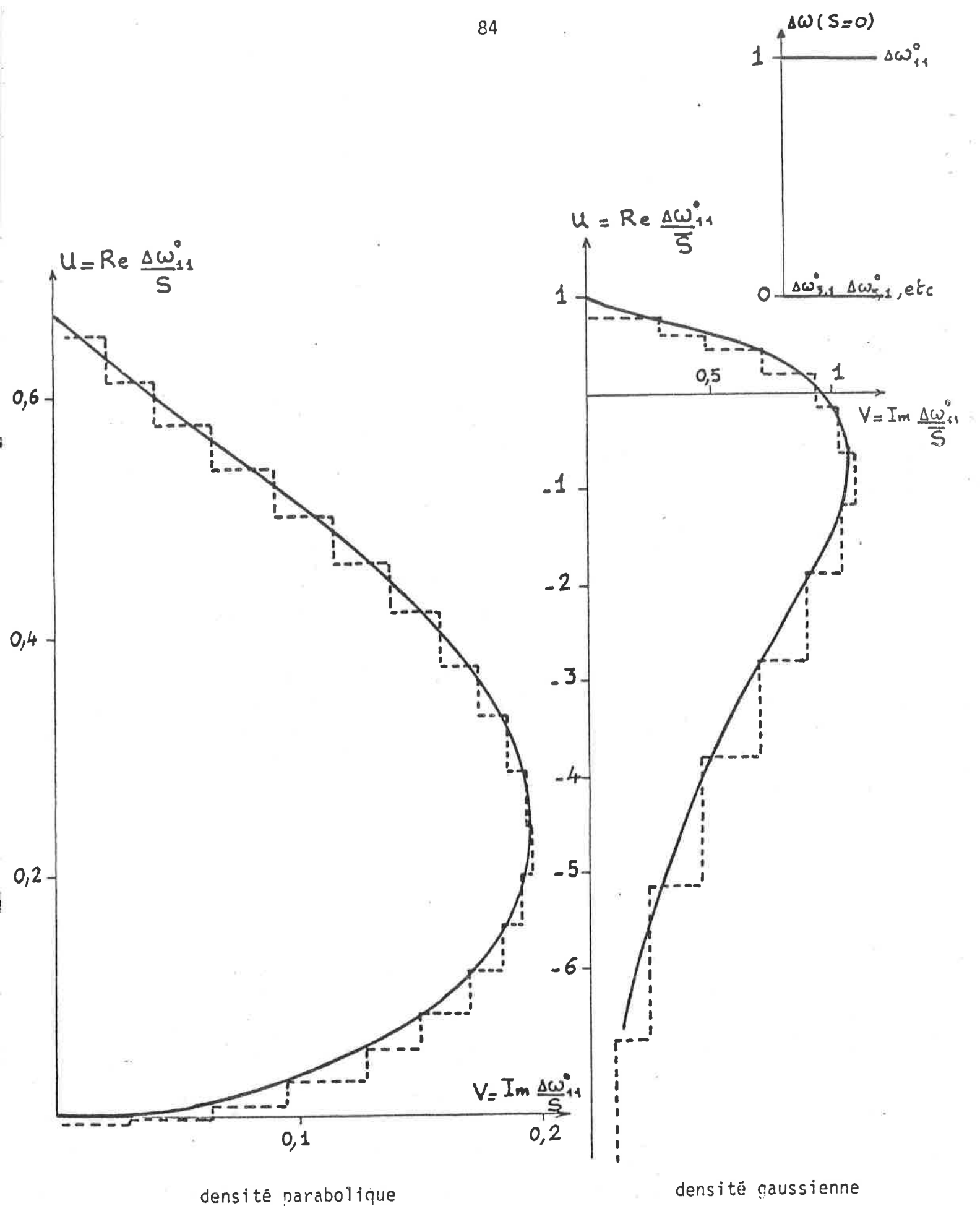


Figure 27 - Seuil de stabilité $\text{Im} \omega = 0$ du mode dipolaire découplé de tout autre mode. Solution continue (26) et son histogramme (25)

$$\begin{bmatrix} \Delta\omega_{11}^0 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & \Delta\omega_{31}^0 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} g_{11} & g_{13} & g_{15} & \cdot & \cdot \\ g_{31} & g_{33} & g_{35} & \cdot & \cdot \\ g_{51} & g_{53} & g_{55} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta\omega_{11}^0 g_{11} & \Delta\omega_{11}^0 g_{13} & \Delta\omega_{11}^0 g_{15} & \cdot & \cdot \\ \Delta\omega_{31}^0 g_{31} & \Delta\omega_{31}^0 g_{33} & \Delta\omega_{31}^0 g_{35} & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \text{matrice } [{}^0M^1] \\ \text{de rang } r_0 = 20, \\ \text{\à valeurs propres} \\ \text{non nulles} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \text{matrice } [G] \\ \text{de rang } r_1 = 20 \\ \text{tous \àl\éments } \\ g_{ik} \neq 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{matrice} \\ \text{poss\édant} \\ \text{\à valeurs propres} \\ \text{non nulles} \end{bmatrix}$$

Figure 28 a - Simplification introduite dans le produit de matrices de la relation de dispersion (65), en limitant la matrice d'interaction $[{}^0M^1]$ \à deux et, plus g\én\éralement, \à valeurs propres $\Delta\omega_{m1}^0$ non nulles

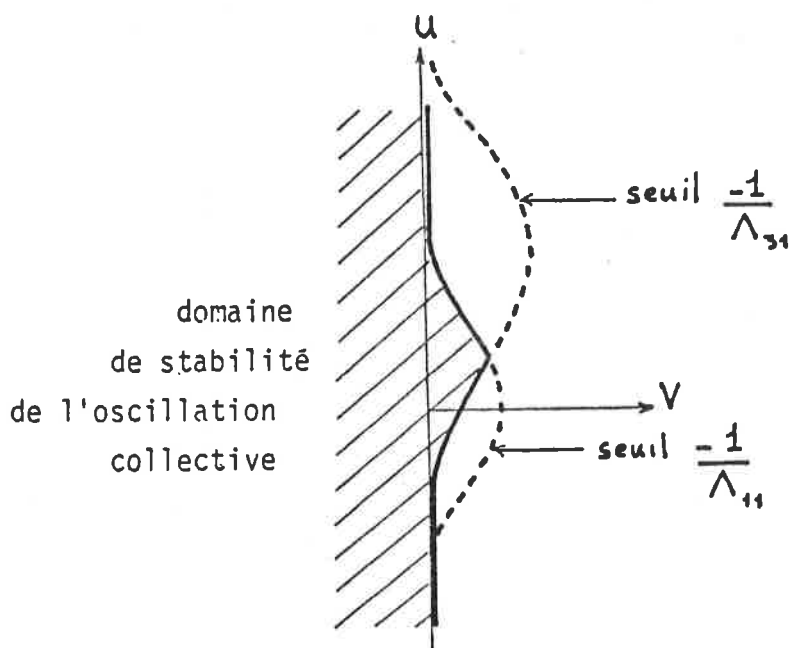


Figure 28 b - Exemple de seuils de stabilit\é de deux modes coupl\és $m = n = 1$ et $m = 3, n = 1$, et, en hachur\é, le domaine de stabilit\é absolue d'une oscillation collective de mode dipolaire $n = 1$

$\frac{\Delta\omega}{nS}$, pour $-1 < \frac{\Delta\omega}{nS} < 0$, donne les seuils de stabilité du mode $m = n = 1$ et du mode $m = 3, n = 1$, dans le plan des fréquences complexes U, V . En fait, ces deux modes sont couplés en présence de dispersion, c'est-à-dire qu'ils ne peuvent être excités séparément, et perdent donc leur identité jusqu'ici repérée par les indices $m = 1, 3$. Une oscillation collective du faisceau n'est parfaitement stable que dans le domaine de stabilité commun à ces deux modes couplés. Nous dirons que le domaine de stabilité d'une oscillation dipolaire possédant deux fréquences propres $\Delta\omega_{11}^0$ et $\Delta\omega_{31}^0$ en l'absence de dispersion, est ce plus faible domaine commun du plan U, V , limité par l'une ou l'autre valeur propre $\Lambda_{11}, \Lambda_{31}$, lorsque la fréquence collective $\Delta\omega$ parcourt la bande incohérente $\Delta\omega_{ln}^1$ (Figure 28b).

La méthode de calcul du seuil de stabilité d'un mode collectif et le cas de Figure 28b se généralisent aisément au cas où l'on considère plus de deux fréquences propres $\Delta\omega_{ln}^0$ non nulles. En fait les calculs ont été effectués en tenant compte de cinq fréquences $\Delta\omega_{ln}^0$ au maximum, ce qui, au regard des spectres de la Figure 12, constitue une bonne approximation de l'interaction locale $\propto \frac{\partial\lambda}{\partial z}$.

Remarque. La relation de dispersion (65), établie par rapport à une matrice d'interaction et une matrice de dispersion, donc avec des valeurs propres discrètes, admet probablement une forme équivalente continue où les termes de couplage $G_{ik}(\frac{\Delta\omega}{nS})$ d'expression (57) seraient remplacés par des intégrales telles que

$$\int_0^\infty \frac{W(r) R_{in} R_{kn} r dr}{r^2 + \frac{\Delta\omega}{nS}} \quad (III-66)$$

Néanmoins, dans les deux cas, la résolution de l'équation de dispersion (65) consiste à diagonaliser une matrice complexe. Le formalisme matriciel caractérisant la méthode de perturbation est donc ici particulièrement adapté à la résolution des problèmes de stabilité. Il évite de plus le calcul d'intégrales singulières telles que (66), où l'intégrant devient une fonction rapidement oscillante lorsque croît l'ordre radial m des modes $R_{mn}(r)$.

Cas de deux modes dipolaires couplés. La relation de dispersion (65) permet de calculer les variations du seuil de stabilité d'une oscillation collective à symétrie azimutale d'ordre n , en fonction du couplage entre les modes radiaux $m = n, n+2, \dots$. Nous avons effectué ce calcul pour une oscillation dipolaire de la densité, et pour une interaction caractérisée par seulement deux fréquences propres $\Delta\omega_{11}^0$ et $\Delta\omega_{31}^0$. On fait varier le couplage entre les modes en variant leur séparation en fréquence dans l'intervalle $\Delta\omega_{11}^0$. Ces variations du seuil de stabilité dans le plan U, V sont représentées sur les Figures 29, pour une densité parabolique, et 30 pour une densité gaussienne. Pour une raison de clarté, les seuils obtenus sous forme d'histogramme (comme sur la Figure 27) sont représentés par une courbe continue. Pour interpréter ces variations de seuils, il est bon de rappeler que la résistivité de la paroi de chambre à vide étant supposée être très faible, la déviation de fréquence $\Delta\omega_{11}^0$ est en pratique approximativement réelle, et voisine de la déviation $\Delta\Omega_{sc}$, définie en première partie pour une impédance de paroi purement réactive. Dans ces conditions, et pour une déviation $\Delta\omega_{11}^0 \approx \Delta\Omega_{sc} > 0$ (avant la transition), l'accroissement du couplage entre modes se traduit, sur ces Figures, par une réduction du domaine $U = \text{Re}\Delta\omega_{11}^0/S$ stable pour les deux distributions. En fonction de la remarque précédente, un gain en stabilité dans la direction $V = \text{Im}\Delta\omega_{11}^0/S$ ne présente pas d'intérêt pratique. Pour une déviation $\Delta\Omega_{sc} < 0$ (après la transition), l'oscillation dipolaire parabolique demeure instable indépendamment du couplage. Dans le cas gaussien, on peut noter un faible accroissement de stabilité qui, se situant vers la queue de la distribution, peut ne pas avoir de signification pour une distribution réelle nécessairement tronquée.

Cas de l'interaction exacte $\propto \frac{\partial \lambda}{\partial z}$. Le modèle précédent d'une oscillation collective faisant intervenir seulement deux modes couplés, explique assez bien la forme des seuils de stabilité que l'on obtient (Figures 31 et 32) pour une oscillation dipolaire $n = 1$, quadrupolaire $n = 2$ et sextupolaire $n = 3$ d'un faisceau à densité parabolique. Les seuils représentés sur ces figures ont été calculés en tenant compte de cinq fréquences propres $\Delta\omega_{mn}^0$ relatives aux modes les plus cohérents. Dans le cas de l'oscillation dipolaire (Figure 31b), on note une réduction

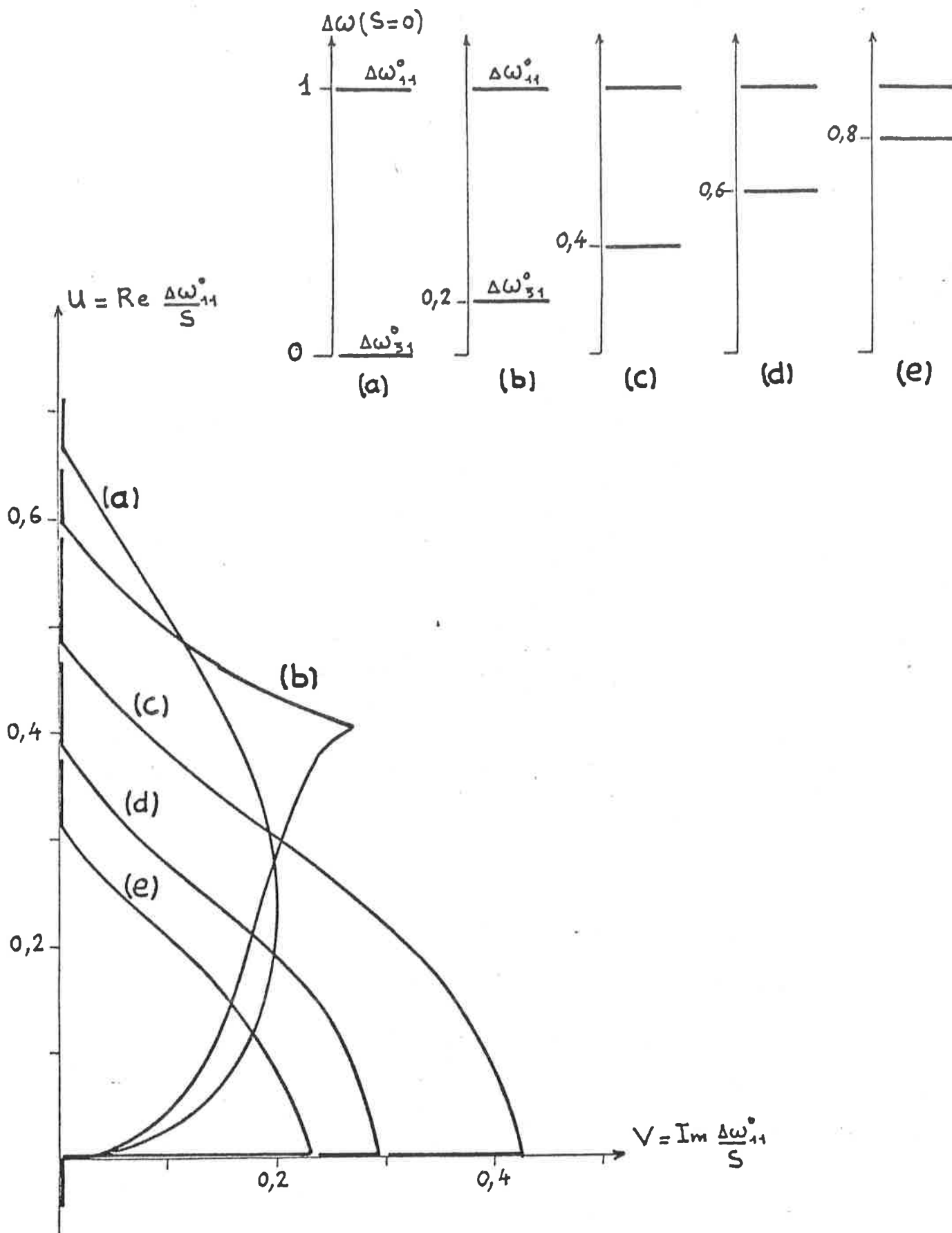


Figure 29 - Seuils de stabilité d'une oscillation dipolaire couplant deux modes ayant pour fréquence propre $\Delta\omega_{11}^0$ et $\Delta\omega_{31}^0$ pour $S = 0$.
Cas d'une densité parabolique

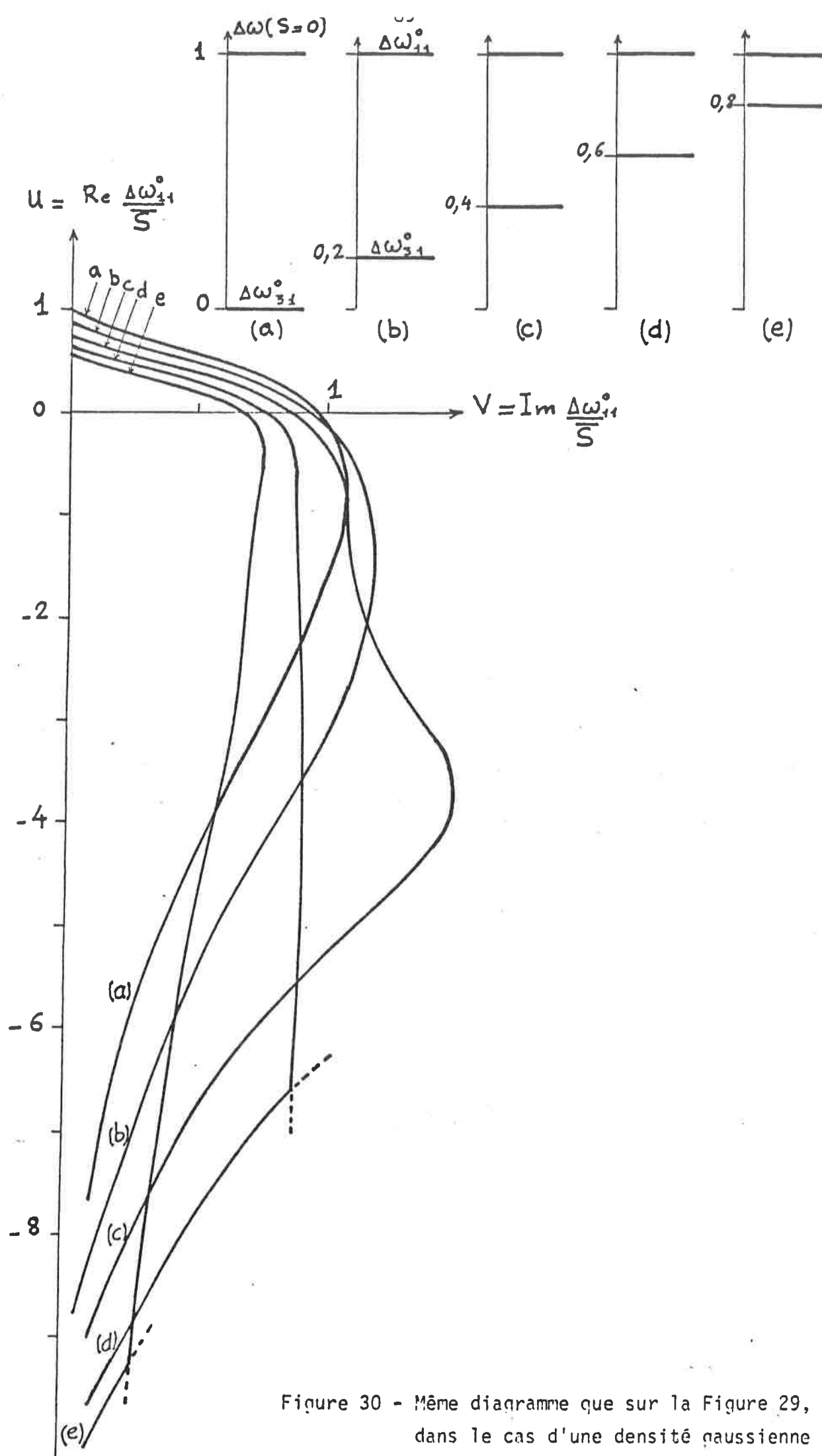


Figure 30 - Même diagramme que sur la Figure 29, dans le cas d'une densité gaussienne

tion du domaine $U = \text{Re}\Delta\omega_{11}^0/S$ stable par un facteur de l'ordre de deux, par rapport au seuil calculé dans l'approximation de l'interaction synchrétique $\propto \bar{z}(t)$. En fait la Figure 31a montre une différence de comportement du mode qui est peut être plus significative que ce rapport deux : dans le cas de l'interaction $\propto \bar{z}(t)$ la fréquence collective pénètre pleinement dans la bande incohérente, ce qui laisse espérer une stabilisation complète du mode, dès que la dispersion devient supérieure au seuil de stabilité. Le cas de l'interaction $\propto \frac{\partial\lambda}{\partial z}$ montre qu'au-delà du seuil théorique, la fréquence collective est confinée dans une partie étroite de la bande incohérente caractérisant les particules au centre du faisceau. Dans cette région l'amortissement de Landau est probablement faible, car on sait que ce phénomène est surtout sensible aux effets de bord de la distribution des particules ^{13,15}). La Figure 31a montre donc une large gamme de valeurs de la dispersion excédant le seuil théorique, soit très approximativement

$$3,5 \lesssim \frac{S}{\Delta\Omega_{sc}} \lesssim 7,$$

où le centre du faisceau reste probablement très proche de l'instabilité. Cette situation explique la forme des modes au voisinage du seuil de stabilité (modes des Figures 18,19) où le centre du faisceau oscille pendant que le bord du faisceau demeure stationnaire. Dans le cas d'une oscillation quadripolaire ou sextupolaire (Figure 32), on note une différence de stabilité moins importante entre l'interaction $\propto \frac{\partial\lambda}{\partial z}$ et l'interaction approchée $\propto \bar{z}^n(t)$, que dans le cas de l'oscillation dipolaire. Nous avons vu qu'une plus grande séparation en fréquence (spectre $\Delta\omega_{mn}^0$ de la Figure 12), donc un couplage plus faible entre le mode le plus cohérent et les modes secondaires, peut expliquer ce résultat.

D'une manière générale, les limites de stabilité du plan U,V , que nous avons obtenues en résolvant l'équation de dispersion (65), confirment l'interprétation et l'application du critère de stabilité faite en deuxième partie (Figures 15 à 17, 21 et 22), à propos des diagrammes donnant la position de la fréquence collective par rapport à la bande des fréquences incohérentes.

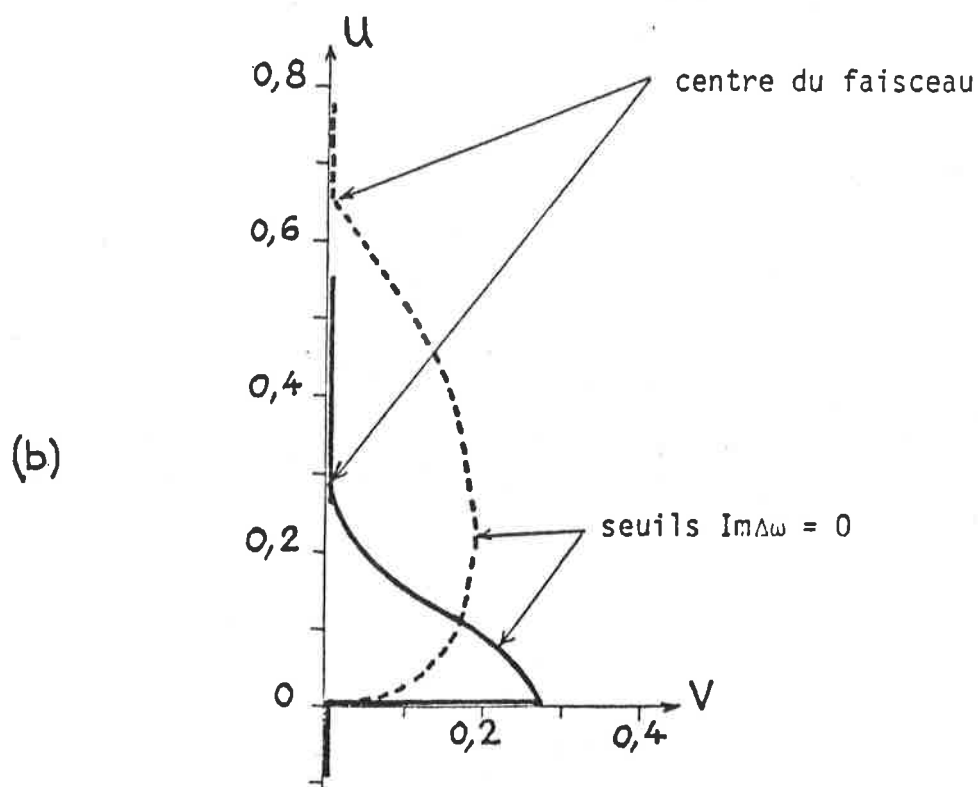
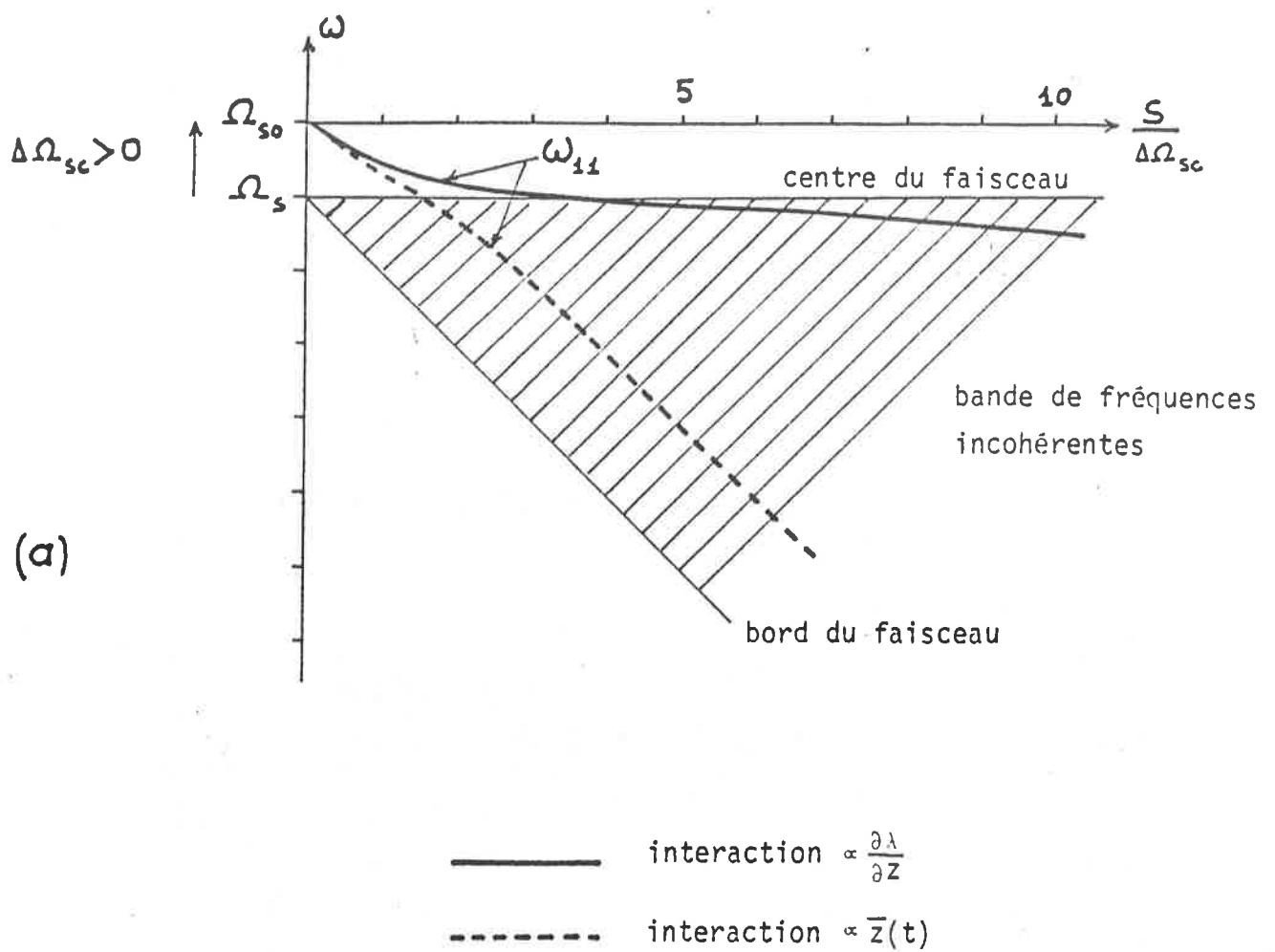


Figure 31 - (a) variation de la fréquence dipolaire ω_{11} par rapport à la bande incohérente, pour l'interaction exacte et simplifiée. Cas d'une densité parabolique.
(b) seuils de stabilité correspondants dans le plan U, V .

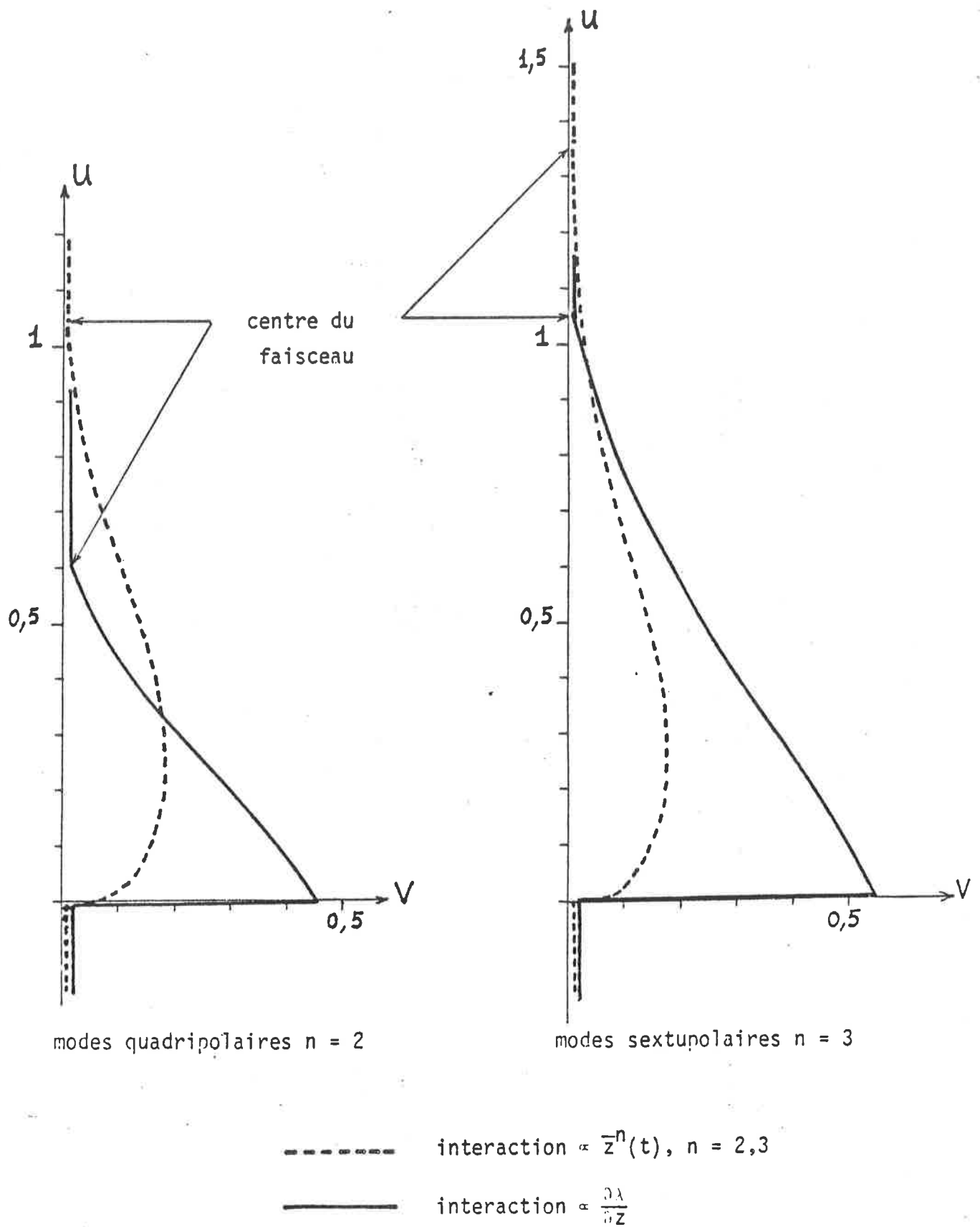


Figure 32 - Seuils de stabilité des modes quadripolaires et sextupolaires.
Cas d'une densité parabolique

CONCLUSION

Nous rappelons les deux principaux paramètres, définis en 1ère partie, qui interviennent dans la théorie de la stabilité des oscillations collectives d'un faisceau. C'est d'abord la déviation de fréquence $\Delta\Omega_{sc}$, un effet de la force de charge d'espace, qui affecte la fréquence $\Omega_s = \Omega_{so} - \Delta\Omega_{sc}$ des oscillations synchrotroniques ou incohérentes des particules. Cette déviation est uniforme pour l'ensemble des particules à densité longitudinale parabolique. Pour toute autre distribution elle dépend de l'amplitude des oscillations et son expression self-consistante a été calculée dans le cas d'un faisceau à densité gaussienne. $\Delta\Omega_{sc}$ est alors plus précisément la déviation de fréquence qui affecte les particules évoluant au centre du faisceau. Nous avons également défini la déviation $\Delta\omega_{11}^o$ entre la fréquence ω_{11} du mode dipolaire rigide et la fréquence synchrotronique au centre du faisceau : $\Delta\omega_{11}^o = \omega_{11} - \Omega_s$. Cette oscillation rigide du faisceau a la propriété de transporter, sans déformation, le potentiel de charge d'espace. Par suite sa fréquence ω_{11} , indépendante de la densité de charge d'espace dans le faisceau, est égale à la fréquence synchrotronique "non perturbée" Ω_{so} et, dans ce cas, on a donc l'égalité $\Delta\omega_{11}^o = \Omega_{sc}$. En fait cette relation n'est vraie que si le potentiel de charge d'espace évolue en phase avec l'oscillation du faisceau, comme dans le cas de l'interaction du faisceau avec une paroi de chambre à vide dont l'impédance est purement réactive. En pratique, la paroi admettant une résistivité faible mais non nulle, un déphasage est pris en compte par une déviation $\Delta\omega_{11}^o$ complexe, voisine de la déviation $\Delta\Omega_{sc}$ réelle. Le second paramètre important est la largeur S de la bande de dispersion des fréquences incohérentes ($\bar{S}$ entre le centre et l'amplitude moyenne des particules à densité gaussienne).

La stabilité du faisceau est généralement décrite par une relation de dispersion pour la fréquence collective ω , comportant une intégrale de dispersion analogue à celle qui décrit l'amortissement de Landau des ondes de plasma soit, pour les différents modes d'ordre $n = 1, 2, 3, \dots$

$$1 - \Delta\omega_{nn}^0 \int_0^\infty \frac{W(r)R_{nn}^2(r)rdr}{\Delta\omega + nSr^2} = 0 \quad (a)$$

La limite de stabilité $\text{Im}\Delta\omega = 0$ dans (a) montre que le critère de stabilité est satisfait lorsque la fréquence collective est à l'intérieur de la bande incohérente. Le seuil de stabilité s'établit en fonction d'un rapport entre la largeur de bande S et la déviation $\Delta\Omega_{sc}$. Toutefois nous savons que cette théorie suppose une approximation de l'interaction du faisceau avec la paroi. Proportionnelle à la variation de densité de charge $\frac{\partial\lambda}{\partial z}(z,t)$ dans la direction longitudinale z du faisceau, cette interaction locale a été approchée par une interaction moyenne, indépendante de z , et dépendant seulement des différents moments $\bar{z}^n(t)$ de la distribution, comme le barycentre $\bar{z}(t)$ dans le cas du mode dipolaire $n=1$.

La raison de cette simplification est liée à certaines difficultés concernant la résolution de l'équation de Vlasov, dont on sait que les solutions exactes ne peuvent être trouvées sous la forme de fonctions régulières en présence de dispersion (modes discontinus de Van-Kampen). Cette situation justifie l'application de la méthode de perturbation que nous avons développée en deuxième partie. Elle a consisté à rechercher les solutions de l'équation de Vlasov sous la forme de développements en série de modes continus, possédant les propriétés d'orthogonalité des solutions exactes. Cette méthode nous a permis de ramener la résolution d'une équation intégrale à celle d'un système algébrique à valeurs propres pour les déviations de fréquences collectives $\Delta\omega = \omega - n\Omega_s$:

$$\text{DET}([{}^0M^n] + [{}^1M^n] - \frac{\Delta\omega}{n\Delta\Omega_{sc}} [I]) = 0 \quad (b)$$

La matrice d'interaction $[{}^0M^n]$, relative aux modes à symétrie circulaire d'ordre n dans le plan de phase, admet une infinité de valeurs propres réelles $\frac{\Delta\omega_{mn}^0}{n\Delta\Omega_{sc}}$, $m = n, n+2, \dots$, décroissant vers zéro lorsque l'ordre m augmente. L'approximation usuelle de l'interaction $\propto \bar{z}^n(t)$ équivaut à ne conserver que la fréquence $\Delta\omega_{nn}^0$ du mode le plus cohérent dans le spectre

de cette matrice. Les valeurs propres réelles $\Delta\omega_{ln}^1$ de la matrice d'interaction $[{}^1M^n]$ donnent une approximation discrète de la bande continue des fréquences incohérentes ou de ses harmoniques d'ordre n . Le fait qu'on sache calculer ces matrices, en tenant compte des effets non linéaires de la charge d'espace gaussienne, laisse penser que la méthode pourrait être appliquée, sans trop de difficultés, à des distributions autres que les densités parabolique et gaussienne. La résolution de l'équation (b), pour ces deux distributions, nous a permis de calculer les fréquences collectives ω réelles (cas d'une impédance de paroi purement réactive) qui sont à l'extérieur de la bande incohérente (Figures 14 à 17), et par suite d'appliquer le critère de stabilité pour l'interaction $\propto \frac{\partial \lambda}{\partial z}$. Ces diagrammes, donnant la variation des fréquences collectives en fonction du rapport $S/\Delta\omega_{sc}$, peuvent être aisément convertis en fonction de la charge totale transportée par le faisceau (Figures 21 et 22 relatives aux paramètres du booster). Rappelons enfin que cette équation (b) nous a permis de calculer la forme des modes de densité dans leur domaine d'instabilité, leur spectre des nombres d'ondes, et de prévoir des variations dans la forme des modes qui sont caractéristiques de la proximité d'un seuil de stabilité.

Le comportement d'une oscillation collective dont la fréquence est à l'intérieur de la bande incohérente a été étudié (troisième partie) en considérant l'évolution dans le temps d'une perturbation initiale de la densité. Nous avons établi deux solutions équivalentes pour ce problème à valeur initiale : pour l'une d'elles l'oscillation de densité est décrite par un spectre continu de fréquences collectives réelles, défini sur la bande de fréquences incohérentes. Alternativement la fréquence de l'oscillation collective a été décrite à l'aide d'une relation de dispersion :

$$\text{DET} ([{}^0M^n] \times [G] - \lambda [I]) = 0, \quad \frac{\Delta\omega_{11}^0}{S} = U + iV = -\frac{1}{\lambda} \quad (c)$$

$[G]$ est alors une matrice complexe, construite à l'aide d'une fonction de Green associée à la matrice d'interaction $[{}^1M^n]$, dont chaque élément est l'approximation discontinue d'une intégrale de dispersion. En particulier on a montré que le déterminant (c) d'ordre 1, obtenu en simplifiant

la matrice d'interaction $[^{\circ}M^n]$ à une seule fréquence propre $\Delta\omega_{nn}^{\circ}$ non nulle, est équivalent à la relation de dispersion (a).

En application de la relation de dispersion (c), nous avons montré que les modes secondaires, négligés par la relation de dispersion (a), contribuent à modifier les limites de stabilité du plan U,V, pour les modes les plus cohérents. Cette contribution dépend de leur séparation en fréquence par rapport au mode le plus cohérent, ce qui peut s'interpréter par l'exercice d'un couplage entre les différents modes. Les limites de stabilité obtenues laissent prévoir, dans certains cas, une grande imprécision concernant la définition d'un seuil de stabilité. Dans le cas typique d'une oscillation dipolaire du faisceau à densité parabolique, le taux de dispersion nécessaire pour stabiliser le centre du faisceau devrait être sensiblement supérieur à celui requis pour stabiliser une oscillation affectant les bords du faisceau.

Nous avons rappelé, dans cette conclusion, les équations (b) et (c) principalement mises en oeuvre par cette méthode de perturbation, en espérant convaincre que cette formulation du problème de la stabilité demeure très accessible au plan du calcul, et qu'elle ne devrait donc pas décourager d'autres applications éventuelles. Nous pensons en particulier au problème de la réponse collective d'un faisceau à une excitation extérieure, qui a fait l'objet d'expériences récentes sur différents accélérateurs (16-17).

APPENDICE A

DISPERSION DES FREQUENCES SYNCHROTRONIQUES PAR UNE FORCE NON LINEAIRE DE CHARGE D'ESPACE STATIONNAIRE

Considérant que la force stationnaire de charge d'espace n'apporte qu'une faible perturbation à la force synchrotronique linéarisée, à l'équation (I-16) des oscillations individuelles

$$\ddot{z} = -\Omega_{so}^2 z + 2\Omega_{so}\Delta\Omega_{sc}F_o(z) \quad , \quad \frac{\Delta\Omega_{sc}}{\Omega_{so}} \ll 1 \quad (A1)$$

correspond l'hamiltonien perturbé

$$H_o(z, \dot{z}) = H_o^0(z, \dot{z}) + H_o^1(z) = \frac{1}{2} (\Omega_{so}^2 z^2 + \dot{z}^2) + H_o^1(z) \quad (A2)$$

$$\frac{dH_o^1}{dz} = -2\Omega_{so}\Delta\Omega_{sc}F_o(z) \quad ,$$

soit encore, en fonction des variables cylindriques r, θ (Tableau 1)

$$H_o(r, \theta) = \Omega_{so}^2 r^2 / 2 + H_o^1(r \cos \theta) \quad (A3)$$

Appliquant une propriété²⁸⁾ des variables d'angle θ et d'action $J = \Omega_{so} r^2 / 2$, la correction de fréquence $\Omega_s(J) - \Omega_{so}$ à l'ordre $\Delta\Omega_{sc}$ s'obtient en effectuant une moyenne de la perturbation autour d'une trajectoire circulaire non perturbée du plan de phase :

$$\Omega_s(J) - \Omega_{so} = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dJ} \int_0^{2\pi} (H_o - \Omega_{so} J) d\theta \quad (A4)$$

Effectuant la dérivation par rapport à J et revenant aux variables r, θ on obtient

$$\Omega_s(r) - \Omega_{so} = - \frac{\Delta\Omega_{sc}}{\pi r} \int_0^{2\pi} F_o(r \cos \theta) \cos \theta d\theta \quad (A5)$$

ou encore, en intégrant par parties

$$\Omega_s(r) = \Omega_{so} - \frac{\Delta\Omega_{sc}}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{dF_o}{dz} \right)_{z=r\cos\theta} \sin^2\theta d\theta \quad (A6)$$

- faisceau à densité parabolique. Le champ de charge d'espace étant linéaire :

$$F_o(z) = z \quad , \quad (A7)$$

on vérifie par (A5) ou (A6) que les particules oscillent toutes à la même fréquence déviée

$$\Omega_s = \Omega_{so} - \Delta\Omega_{sc} \quad , \quad (A8)$$

indépendamment de l'amplitude r .

- faisceau à densité gaussienne. La force étant de la forme

$$F_o(z) = ze^{-z^2} \quad (A9)$$

on obtient par (A5)

$$\Omega_s(r) = \Omega_{so} - \frac{\Delta\Omega_{sc}}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{-r^2 \cos^2\theta} \cos^2\theta d\theta \quad (A10)$$

Effectuant le passage à l'angle double $\alpha = 2\theta$ il vient

$$\Omega_s(r) = \Omega_{so} - \Delta\Omega_{sc} e^{-r^2/2} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2} \cos\alpha} d\alpha + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2} \cos\alpha} \cos\alpha d\alpha \right) \quad (A11)$$

Considérant la forme intégrale des fonctions de Bessel

$$i^n J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(x \cos\alpha - n\alpha)} d\alpha \quad (A12)$$

on obtient, pour les fonctions de Bessel modifiées $I_n(x) = J_n(ix)/i^n$,

l'expression

$$(-1)^n I_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-x \cos \alpha} e^{-in\alpha} d\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-x \cos \alpha} \cos n\alpha d\alpha \quad (A13)$$

La dispersion de fréquence (A11) s'exprime donc à l'aide de ces fonctions sous la forme

$$\Omega_s(r) = \Omega_{so} - \Delta\Omega_{sc} e^{-r^2/2} (I_0(r^2/2) - I_1(r^2/2)) \quad (A14)$$

APPENDICE BSEUIL DE STABILITE DU MODE DIPOLAIRE POUR L'INTERACTION SIMPLIFIEE (I-43)1. DENSITE GAUSSIENNE

Pour la fonction de distribution des amplitudes d'oscillations (Tableau 1)

$$f_0(r) = \frac{e^{-r^2}}{\pi \Omega_{s0}}$$

la relation de dispersion (I-54) s'écrit

$$\frac{1}{U + iV} = \int_0^\infty \frac{ae^{-a} da}{a + p} = 1 - p \int_0^\infty \frac{e^{-a} da}{a + p} \quad (B1)$$

$$a^2 = r^2 = \frac{r_z^2}{\sigma^2}, \quad p = \frac{\omega - \Omega_s}{S} = \frac{\Delta\omega}{S}$$

a) $p > 0$, $\Delta\omega$ en dehors de la bande des fréquences incohérentes.

L'expression (B1) se réduit à

$$\frac{1}{U} = 1 - p \int_0^\infty \frac{e^{-a} da}{a + p} \quad (B2)$$

Effectuant le changement de variable $t = a + p$, (B2) s'exprime à l'aide d'une fonction "exponentielle intégrale" tabulée

$$\frac{1}{U} = 1 - pe^p(-E_1(-p)) \quad (B3)$$

$$-E_1(-p) = \int_p^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt \quad (B4)$$

b) $p < 0$, $\Delta\omega$ dans la bande des fréquences incohérentes. (B1) devient

$$\frac{1}{U + iV} = 1 - pe^P \left[\text{V.P.} \int_p^\infty \frac{e^{-t} dt}{t} - i\pi \right] , \quad (B5)$$

où la valeur principale de l'intégrale est reliée à la fonction (B4) par

$$\text{V.P.} \int_p^\infty \frac{e^{-t} dt}{t} = - (E_1(-p+i\epsilon) + E_1(-p-i\epsilon))/2 = -\bar{E}_1(-p) , \quad (B6)$$

soit :

$$\frac{1}{U + iV} = 1 + pe^P \bar{E}_1(-p) + i\pi pe^P \quad (B7)$$

2. DENSITE PARABOLIQUE

Pour la fonction de distribution (Tableau 1)

$$f_0(r) = \frac{3}{2\pi\Omega_{SO}} \sqrt{1-r^2}$$

la relation de dispersion (I-54) s'écrit

$$\frac{1}{U + iV} = \frac{3}{4} \int_0^1 \frac{ada}{(p+a)\sqrt{1-a}} = \frac{3}{2} - p \int_0^1 \frac{da}{(p+a)\sqrt{1-a}} , \quad (B8)$$

$$a = r^2 = \frac{r_z^2}{\ell^2} , \quad p = \frac{\Delta\omega}{S}$$

a) $p > 0$ ou $p < -1$, $\Delta\omega$ en dehors de la bande des fréquences incohérentes. Effectuant le changement de variable $t = \sqrt{1-a}$ dans (B8) on obtient

$$\frac{1}{U} = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{P}{2\sqrt{1+p}} \text{Log} \frac{\sqrt{1+p} + 1}{\sqrt{1-p} - 1} \right) , \quad p > 0 \quad (B9)$$

$$\frac{1}{U} = \frac{3}{2} \left(1 + \frac{p}{\sqrt{-1-p}} \operatorname{Atg} \frac{1}{\sqrt{-1-p}} \right), \quad p < -1$$

b) $-1 < p < 0, \Delta\omega$ dans la bande des fréquences incohérentes. L'intégrale dans (B8) contribue par sa valeur principale et par le pôle $a = p$, soit

$$\frac{1}{U + iV} = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{p}{2\sqrt{1+p}} \operatorname{Log} \frac{1 + \sqrt{1+p}}{1 - \sqrt{1+p}} - \frac{i\pi}{2} \frac{p}{\sqrt{1+p}} \right). \quad (B10)$$

APPENDICE C

Eléments de la matrice d'interaction [${}^0M^n$] et de la matrice de dispersion [${}^1M^n$], pour des faisceaux à densité parabolique et gaussienne

1 - Relation intégrale entre les modes $R_{mn}(r)$ et $\lambda_{mn}(z)$, $\tilde{\lambda}_{mn}(k)$.

Cherchant à adapter la relation de définition de la densité sur l'axe longitudinal

$$\lambda_1(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(z, \dot{z}) d\dot{z} = \iint_{-\infty}^{+\infty} f_1(z', \dot{z}') \delta(z-z') dz' d\dot{z}' \quad , \quad (C1)$$

à la propriété des modes $f_1(z, \dot{z}) \sim W(r) R_{mn}(r) e^{-in\theta}$ d'être séparables par rapport aux variables r, θ , on écrit

$$\lambda_{mn}(z) = \Omega_{so} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} W(r) R_{mn}(r) e^{-in\theta} \delta(z-r \cos\theta) r dr d\theta \quad , \quad (C2)$$

Pour la représentation intégrale de la fonction de Dirac

$$\delta(z-z') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ik(z-z')} dk \quad ,$$

il vient

$$\lambda_{mn}(z) = \Omega_{so} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikz} dk \int_0^{\infty} W(r) R_{mn}(r) \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(kr \cos\theta - n\theta)} d\theta \right) r dr \quad (C3)$$

où l'expression entre parenthèses est une représentation intégrale des fonctions de Bessel d'ordre n :

$$i^n J_n(kr) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(kr \cos\theta - n\theta)} d\theta \quad , \quad (C4)$$

Les modes $\lambda_{mn}(z)$ et $R_{mn}(r)$ sont donc reliés par une transformation intégrale double de type Fourier-exponentiel et Fourier-Bessel, cette dernière s'écrivant

$$\begin{aligned}\tilde{\lambda}_{mn}(k) &= i^n \Omega_{so} \int_0^\infty W(r) R_{mn}(r) J_n(kr) r dr \\ W(r) R_{mn}(r) &= \frac{1}{i^n \Omega_{so}} \int_0^\infty \tilde{\lambda}_{mn}(k) J_n(kr) k dk\end{aligned}\quad (C5)$$

Les expressions qui relient les modes de la Table 3 (page 36) s'écrivent:

- Pour les polynômes de Laguerre²⁹⁾ du faisceau gaussien :

$$r^n e^{-r^2} L_{\frac{m-n}{2}}^n(r^2) = \frac{1}{2^{m+1} (\frac{m-n}{2} !)} \int_0^\infty k^m e^{-k^2/4} J_n(kr) k dk, \quad (C6)$$

- Pour les polynômes de Jacobi du faisceau parabolique³⁰⁾

$$(1-r^2)^{-1/2} r^n P_{\frac{m-n}{2}}^{n, -1/2}(1-2r^2) = \frac{(m-n-1)!!}{\sqrt{2\pi}(m-n)!!} \int_0^\infty J_{m+1/2}(k) J_n(kr) k^{1/2} dk \quad (C7)$$

$$m!! = m(m-2)(m-4)\dots$$

$$0!! = 1, \quad (-1)!! = 1.$$

2 - Eléments ${}^oM_{ij}^n$ de la matrice d'interaction

a) faisceau gaussien . Partant de l'expression (II-21)

$${}^oM_{ij}^n = \frac{4i\pi}{\Omega_{so} C} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{K}(k)}{k} \tilde{\lambda}_{in}(k) \tilde{\lambda}_{jn}^*(k) dk$$

avec

$$C = -\pi \Omega_{so} / 2, \quad \frac{\tilde{K}(k)}{k} = \frac{1}{2\pi\alpha}, \quad \alpha = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$$

et $\tilde{\lambda}_{jn}(k) = \frac{(1)^n}{\sqrt{2}} \Omega_{so} E_{jn} k^j e^{-k^2/4}$ (Table 3) ,

on obtient :

$${}^oM_{ij}^n = \frac{E_{in} E_{jn}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} k^{1+j} e^{-k^2/2} dk \quad (C8)$$

Les indices

$$i, j = n, n+2, n+4, \dots$$

ayant la même parité, le changement de variable $k' = k^2/2$ réduit l'intégrale à la fonction $\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$:

$${}^oM_{ij}^n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} 2^{(1+j+1)/2} E_{in} E_{jn} \Gamma\left(\frac{1+j}{2} + \frac{1}{2}\right) \quad (C9)$$

ce qui, avec une autre notation :

$$\Gamma(n + 1/2) = \sqrt{\pi} \frac{(2n-1)!!}{2^n}$$

peut encore s'écrire

$$\begin{aligned} {}^oM_{ij}^n &= \sqrt{2} E_{in} E_{jn} (1+j-1)!! \\ {}^oM_{ij}^n &= \frac{\sqrt{2} (1+j-1)!!}{2^{1+j} \left[\left(\frac{1-n}{2}\right)! \left(\frac{1+n}{2}\right)! \left(\frac{j-n}{2}\right)! \left(\frac{j+n}{2}\right)! \right]^{1/2}} \quad (C10) \end{aligned}$$

b) faisceau parabolique. Partant de l'expression (II-23) des éléments de matrice

$${}^oM_{ij}^n = -\frac{1}{\pi \Omega_{so} \alpha C} \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda_{in}(z) \lambda_{jn}(z) dz$$

avec

$$\alpha = 3/2, \quad C = -2\pi \Omega_{so}/3$$

$$\lambda_{in}(z) = \pi \Omega_{so} E_{in} P_1(z), \quad -1 \leq z \leq 1$$

et appliquant la relation d'orthogonalité des polynômes de Legendre

$$\int_{-1}^1 P_i(z) P_j(z) dz = \frac{2}{2i+1} \delta_{ij} \quad , \quad 2$$

on obtient :

$$\begin{aligned} {}^0M_{ij}^n &= \frac{2E_{in}E_{jn}}{2i+1} \delta_{ij} \\ {}^0M_{jj}^n &= \frac{2(j-n-1)!!(j+n-1)!!}{(j-n)!!(j+n)!!} \end{aligned} \quad (C11)$$

3 - Eléments de matrice $({}^1M_{ij}^n)_S$ pour la dispersion synchrotronique

Les éléments de matrice (II-39) s'écrivent :

$$({}^1M_{ij}^n)_S = \int_0^\infty W(r) r^2 R_{in} R_{jn} r dr \quad (C12)$$

a) densité gaussienne : Pour les polynômes de Laguerre (Tableau 3) on obtient :

$$\begin{aligned} {}^1M_{ij}^n &= \frac{1}{2} D_{in} D_{jn} \int_0^\infty a^{n+1} e^{-a} \frac{L_{\frac{i-n}{2}}^n}{\frac{2}{2}} \frac{L_{\frac{j-n}{2}}^n}{\frac{2}}{2}} da \quad , \\ a &= r^2 \end{aligned} \quad (C13)$$

Appliquant les relations de récurrence, il vient :

$$a \frac{L_{\frac{i-n}{2}}^n}{2} = (1+1) \frac{L_{\frac{i-n}{2}}^n}{2} - \left(\frac{i+n}{2} \right) \frac{L_{\frac{i-n}{2}-1}^n}{2} - \left(\frac{i-n}{2} + 1 \right) \frac{L_{\frac{i-n}{2}+1}^n}{2} \quad (C14)$$

Reportant cette expression dans (C13) et appliquant la relation d'orthogonalité

$$\frac{1}{2} D_{in} D_{jn} \int_0^\infty a^n e^{-a} \frac{L_{\frac{i-n}{2}}^n}{2} \frac{L_{\frac{j-n}{2}}^n}{2} da = \delta_{ij} \quad , \quad (C15)$$

on obtient une contribution tridiagonale de la dispersion synchrotronique sous la forme

$$({}^1M_{ij}^n)_S = (i+1)\delta_{ij} - \left(\left(\frac{i-n}{2}+1\right)\left(\frac{i+n}{2}+1\right)\right)^{1/2} \delta_{i,j-2} - \left(\left(\frac{j-n}{2}+1\right)\left(\frac{j+n}{2}+1\right)\right)^{1/2} \delta_{i-2,j} \quad (C16)$$

b) densité parabolique. Procédant comme en a) les intégrales à calculer s'écrivent :

$$M_{k\ell}^n = \frac{1}{2} D_{\ell n} D_{kn} \int_0^1 \frac{a^{n+1}}{\sqrt{1-a}} P_{\frac{\ell-n}{2}}^{n,-1/2} P_{\frac{k-n}{2}}^{n,-1/2} da \quad (C17)$$

Pour les polynômes de Jacobi d'argument $(1-2a)$ on a :

$$\begin{aligned} a P_{\frac{\ell-n}{2}}^{n,-1/2} &= \left(\frac{(\ell+n)(\ell+n-1)}{(2\ell+1)(2\ell-1)} + \frac{(\ell-n+1)(\ell-n+2)}{(2\ell+1)(2\ell+3)} \right) P_{\frac{\ell-n}{2}}^{n,-1/2} \\ &- \frac{(\ell+n)(\ell-n-1)}{(2\ell-1)(2\ell+1)} P_{\frac{\ell-n}{2}-1}^{n,-1/2} - \frac{(\ell-n+2)(\ell+n+1)}{(2\ell+1)(2\ell+3)} P_{\frac{\ell-n}{2}+1}^{n,-1/2} \end{aligned} \quad (C18)$$

Reportant cette expression dans (C17) les éléments de la matrice tridiagonale s'écrivent :

$${}^1M_{kk}^n = \frac{(k+n)(k+n-1)}{(2k-1)(2k+1)} + \frac{(k-n+1)(k-n+2)}{(2k+1)(2k+3)} \quad (C19)$$

$${}^1M_{k,k+2}^n = \frac{1}{2k+3} \left(\frac{(k+n+1)(k+n+2)(k-n+1)(k-n+2)}{(2k+1)(2k+5)} \right)^{1/2}, \quad k=n, n+2, \dots$$

Contrairement aux éléments gaussiens (C16), les éléments d'ordre élevé sont bornés :

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} {}^1M_{kk}^n &= \frac{1}{2} \\ \lim_{k \rightarrow \infty} {}^1M_{k,k+2}^n &= \frac{1}{4} \end{aligned} \quad (C20)$$

4 - Eléments de matrice $(^1M_{ij}^n)_{c.e.}$ pour la dispersion de charge d'espace gaussienne.

Les éléments de matrice (II-39) s'écrivant :

$$(^1M_{ij}^n)_{c.e.} = \delta_{ij} - \int_0^\infty W(r)G(r)R_{in}R_{jn}rdr, \quad (C21)$$

nous introduisons la fonction de dispersion $G(r)$ sous sa forme intégrale (A10), de préférence à son expression (I-17) par rapport aux fonctions de Bessel :

$$^1M_{ij}^n = \delta_{ij} - \frac{D_{in}D_{jn}}{\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-r^2(1+\cos^2\theta)} r^{2n} L_{\frac{i-n}{2}}^n L_{\frac{j-n}{2}}^n \cos^2\theta r dr d\theta. \quad (C22)$$

Intégrant d'abord par rapport à r , on applique le résultat d'une transformation de Laplace portant sur les polynômes de Laguerre

$$\int_0^\infty e^{-sx} x^n L_{\frac{i-n}{2}}^n L_{\frac{j-n}{2}}^n dx = \frac{(\frac{i+j}{2})! (s-1)^{\frac{1+j}{2}-n}}{(\frac{i-n}{2})! (\frac{j-n}{2})! s^{\frac{1+j}{2}+1}} \times F\left(-\frac{i-n}{2}, -\frac{j-n}{2}, -\frac{1+j}{2}, \frac{s(s-2)}{(s-1)^2}\right) \quad (C23)$$

Les paramètres a, b, c de la fonction hypergéométrique $F(a, b, c, z)$ étant ici des entiers négatifs, la fonction se réduit à un polynôme, et on obtient :

$$^1M_{ij}^n = \delta_{ij} - \frac{2}{\pi} D_{in}D_{jn} \sum_{p=0}^{\frac{i-n}{2}} \frac{(\frac{1+j}{2}-p)!}{(\frac{i-n}{2}-p)! (\frac{j-n}{2}-p)! p!} \int_0^{\pi/2} \frac{(\cos^2\theta)^{\frac{1+j}{2}+1-n-2p} (\sin^2\theta)^p d\theta}{(1+\cos^2\theta)^{\frac{1+j}{2}+1-p}} \quad (C24)$$

Posant $\text{tg } \theta = t$, les intégrales (C24) s'écrivent :

$$\int_0^\infty \frac{(1+t^2)^{n-1} t^{2p}}{(2+t^2)^{\frac{1+j}{2}+1-p}} dt = \sum_{r=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{r!(n-1-r)!} \int_0^\infty \frac{t^{2(p+r)}}{(2+t^2)^{\frac{1+j}{2}+1-p}} dt, \quad (C25)$$

où les nouvelles intégrales sont les fonctions Béta :

$$B(m,n) = \int_0^{\infty} \frac{x^{m-1} dx}{(1+x)^{m+n}} = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \quad (C26)$$

Rassemblant les trois dernières expressions on obtient :

$${}^1M_{ij}^n = \delta_{ij} - \frac{D_{in} D_{jn}}{2^{1+j+1/2}} (n-1)! \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{p=0}^{\frac{1-n}{2}} \frac{2^{3p+r} (2p+2r-1)!! (1+j-4p-2r-1)!!}{r! (n-1-r)! \left(\frac{1-n}{2} - p\right)! \left(\frac{j-n}{2} - p\right)! p!} \quad (C27)$$

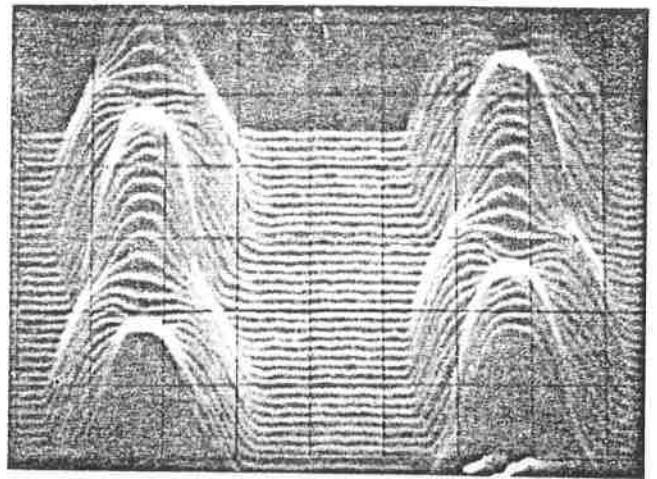
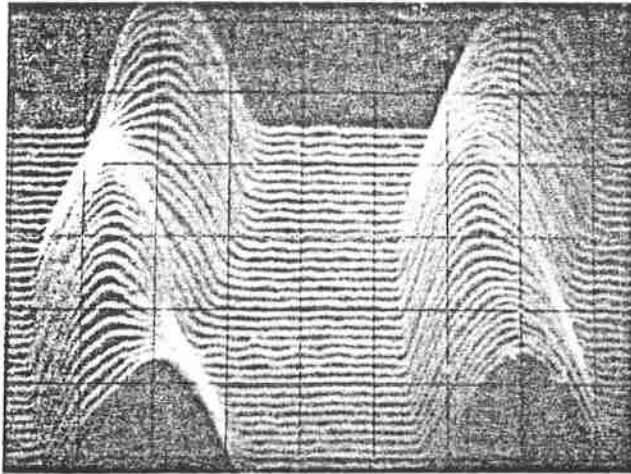
PHOTOGRAPHIES MONTRANT LA FORME DES MODES DE DENSITE
ET QUELQUES ASPECTS CONCERNANT L'INSTABILITE DU FAISCEAU
DANS LE BOOSTER DU CERN

Les planches de photographies rassemblées dans les pages suivantes sont extraites d'une documentation due à F. Sacherer. Nous le remercions de nous avoir permis de les reproduire ici car ces documents peuvent illustrer très utilement le texte précédent.

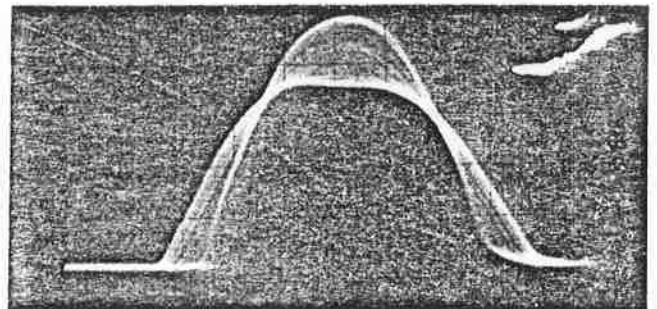
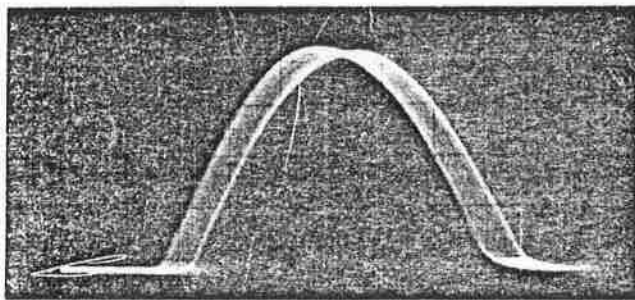
Ces photographies représentent un signal proportionnel à la densité longitudinale de charge dans le faisceau du booster (cinq faisceaux groupés par anneaux). Les traces sont soit superposées, soit décalées verticalement dans le temps, l'étalement des traces donnant un relief en forme de chaîne de montagnes.

Elles représentent les modes d'oscillation de la densité les plus caractéristiques, quelques aspects concernant le développement des instabilités au cours du cycle d'accélération et illustrent quelques techniques mises en oeuvre au CERN pour contrôler les instabilités.

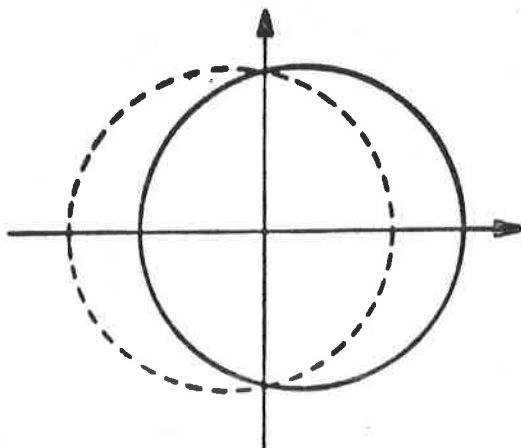
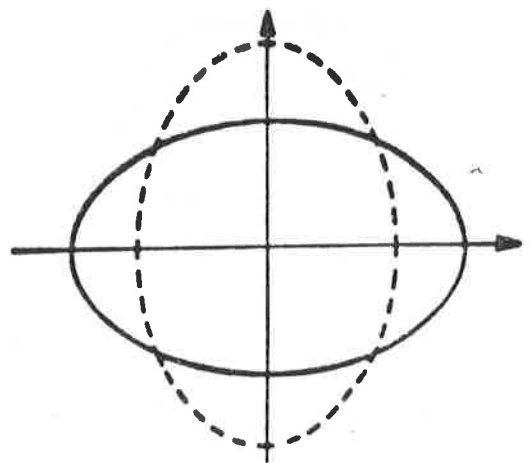
a)



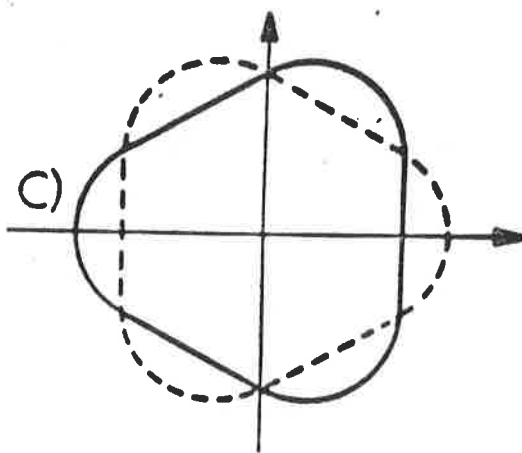
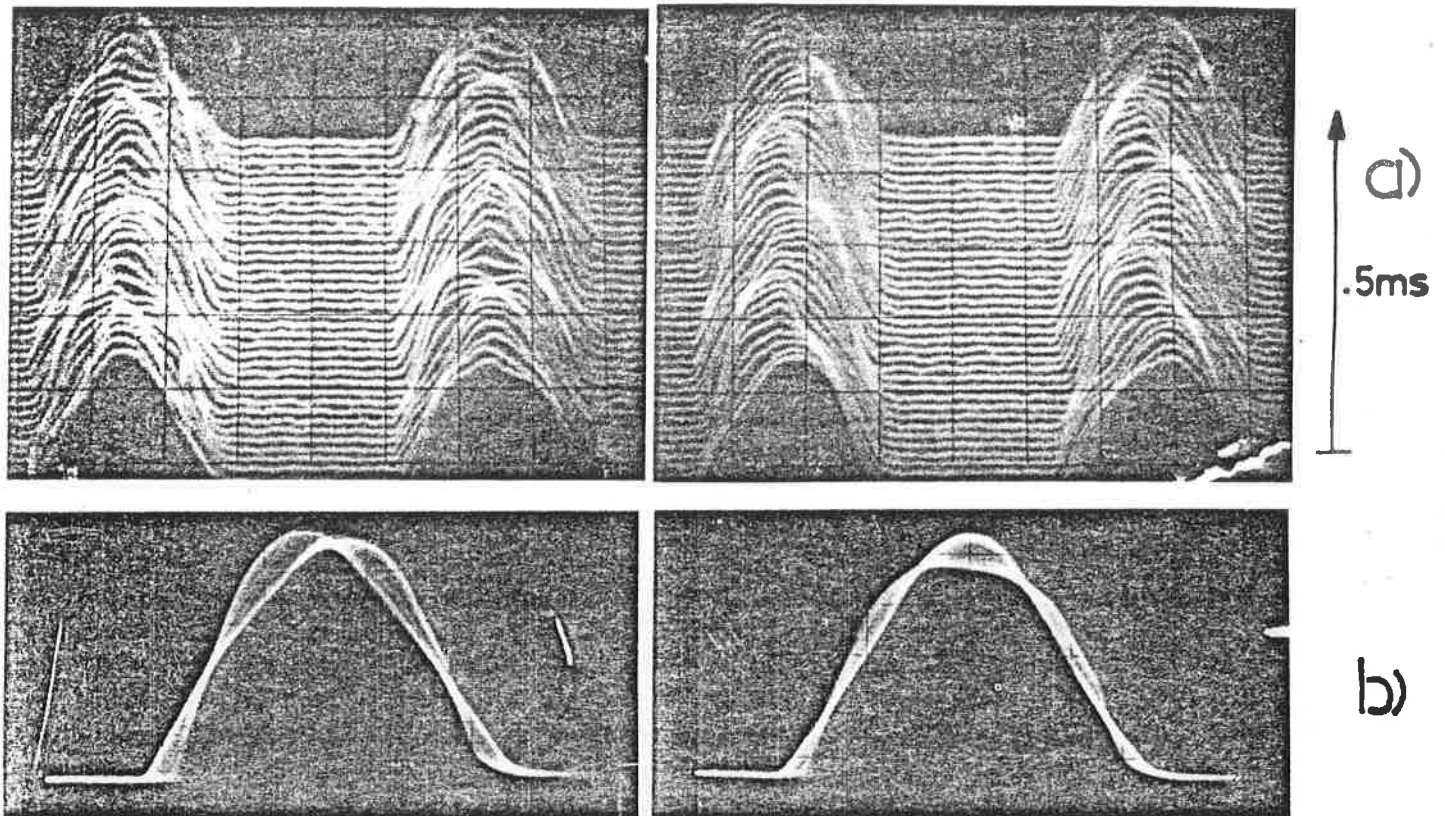
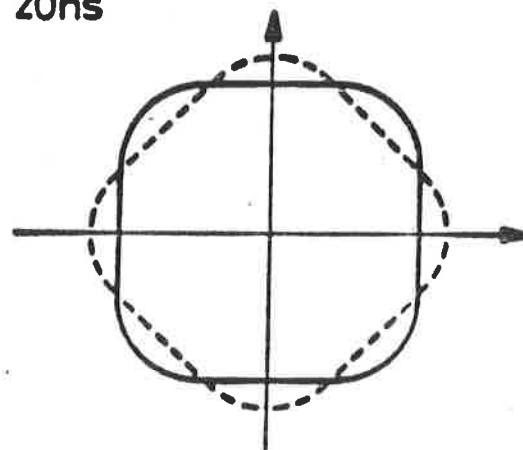
b)



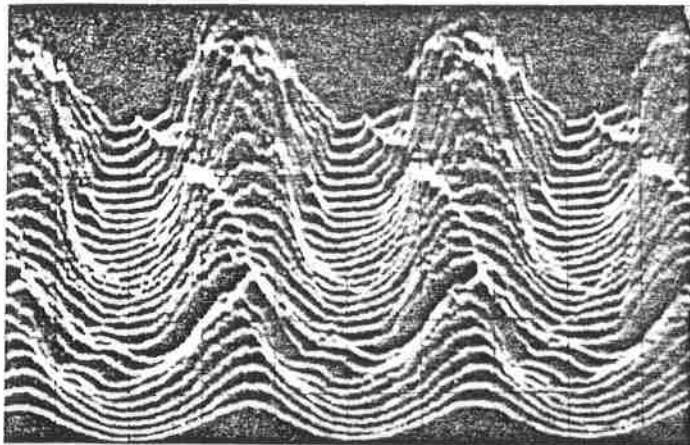
c)

mode dipolaire $n = 1$ mode quadripolaire $n = 2$ PLANCHE 1

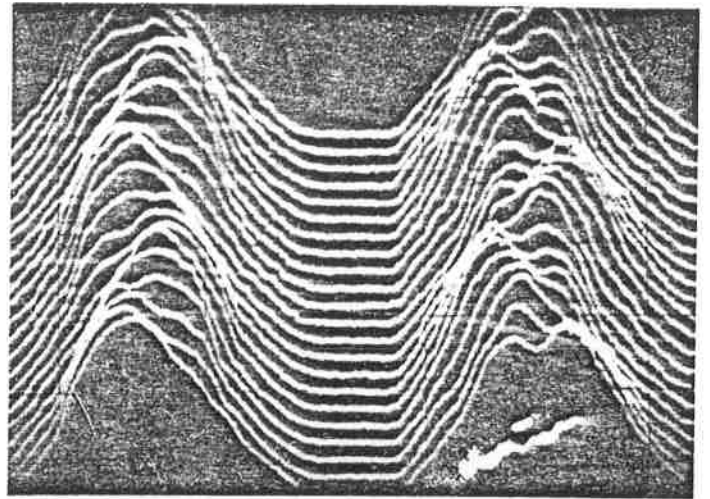
Planches 1 et 2. (a) Etalement des traces sur une période $\frac{2\pi}{\omega_s} = 0,5 \text{ ms}$ de l'oscillation synchrotrique : oscillations de la densité longitudinale $\lambda(z,t)$ selon les modes $n = 1$ à 4. (b) Traces superposées. (c) Représentation de la symétrie d'ordre n dans une rotation de la distribution perturbée autour de l'origine du plan de phase $z, \dot{z}/s$. Les traces (a) montrent que l'oscillation de mode n a une fréquence propre voisine de l'harmonique $n\omega_s$. Les traces (b) montrent que l'oscillation de densité

mode sextupolaire $n = 3$ mode octupolaire $n = 4$ PLANCHE 2

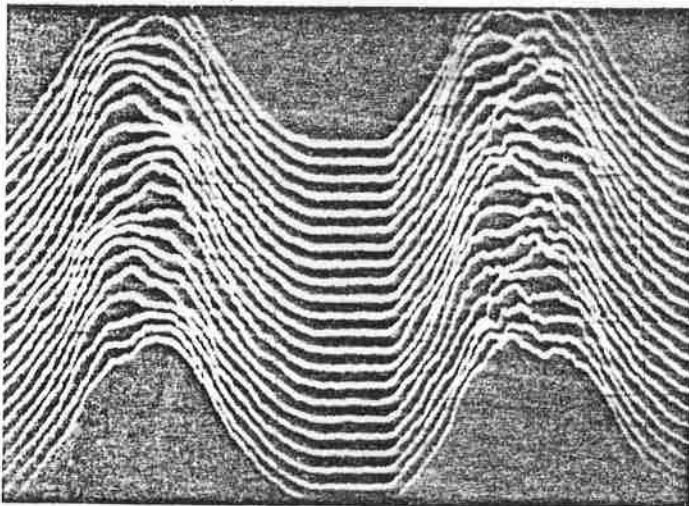
$\lambda(z,t)$ peut être analysée comme étant la superposition d'une densité stationnaire $\lambda_0(z)$, de forme approximativement parabolique, et d'une onde stationnaire $\lambda_1(z,t)$ présentant n noeuds fixes sur la longueur du faisceau.



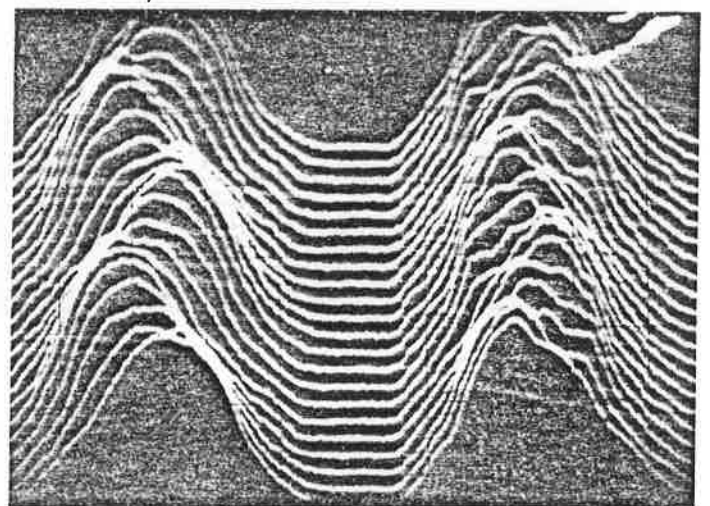
a) 19,5 ms



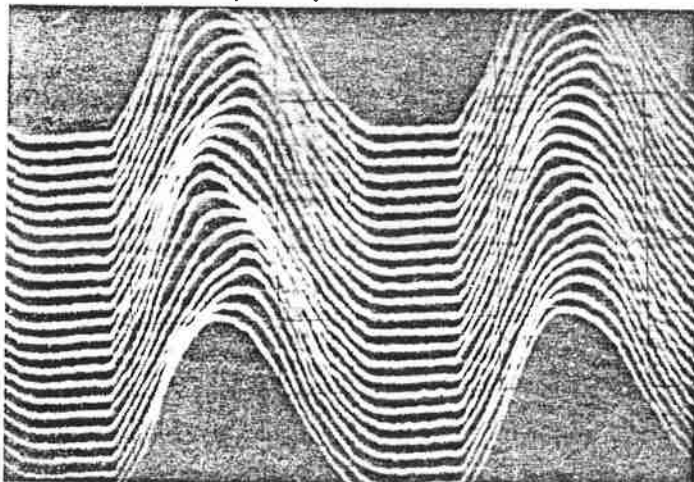
b) 29,5 ms



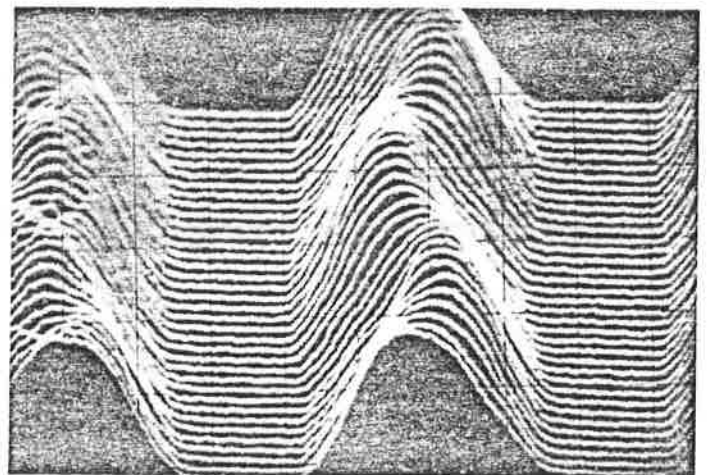
c) 29,5 ms



d) 29,5 ms



e) 49,5 ms



f) 350 ms

Planche 3. La photo (a) montre que la formation des faisceaux a lieu pendant les 20 premières millisecondes du cycle d'accélération, de l'ordre de 600 ms. Après cette phase de regroupement (b,c,d) subsistent des oscillations incohérentes de densité. Ces perturbations sont rapidement stabilisées (e,f) et il ne subsiste alors que le mode dipolaire le plus cohérent, où l'oscillation affecte plus le centre que le bord du faisceau.

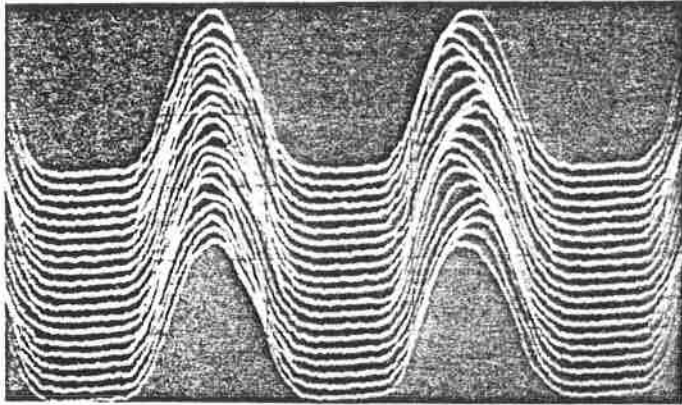
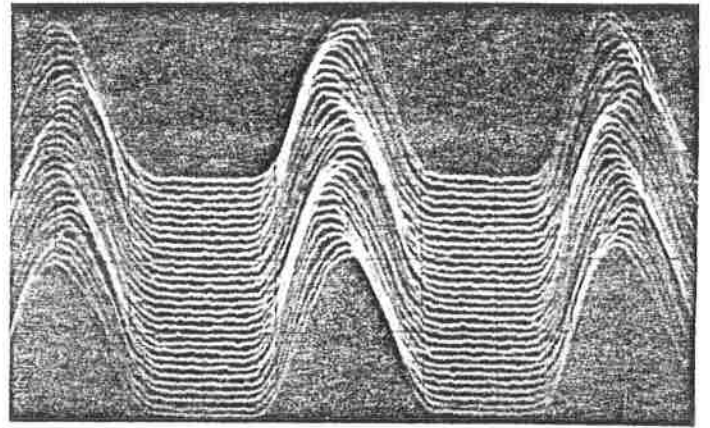
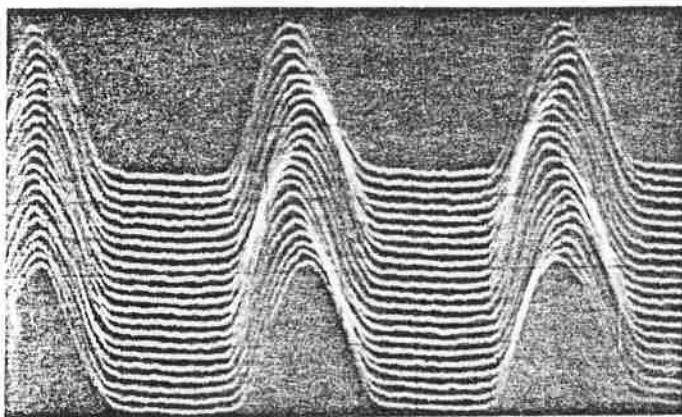
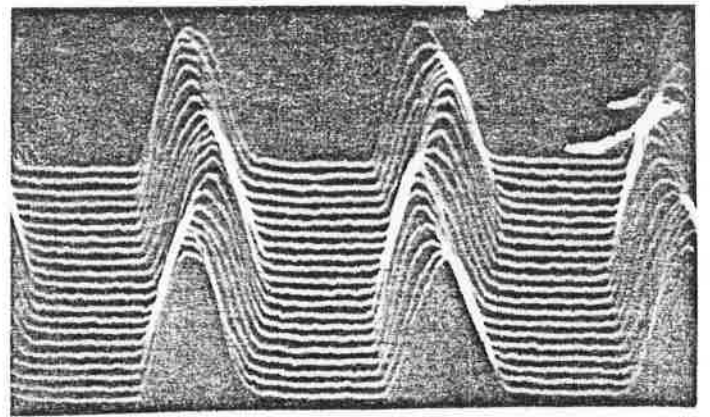
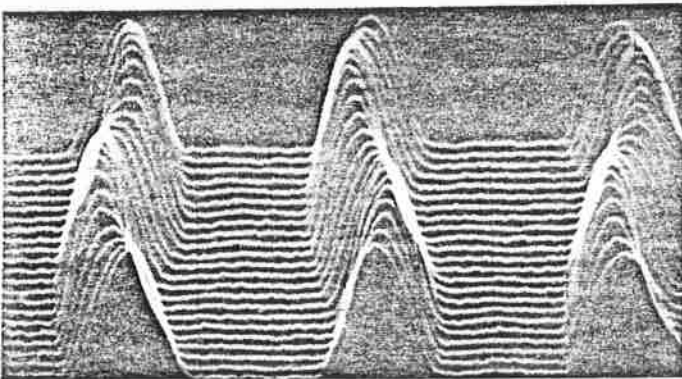
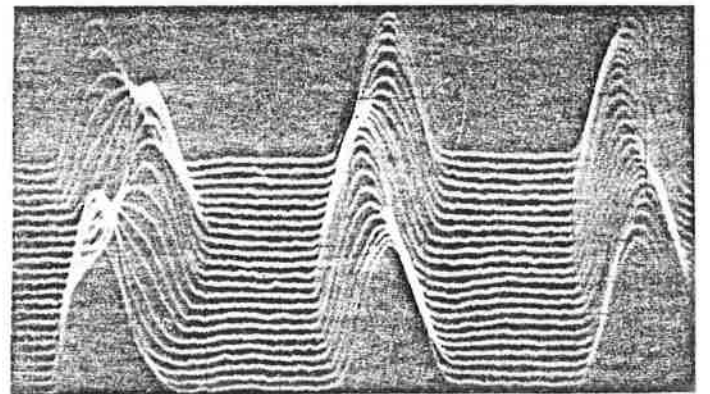
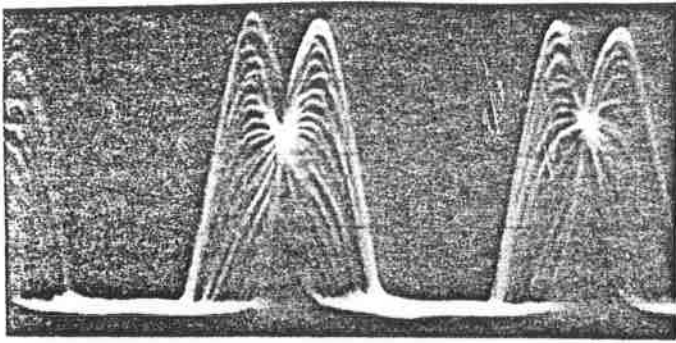
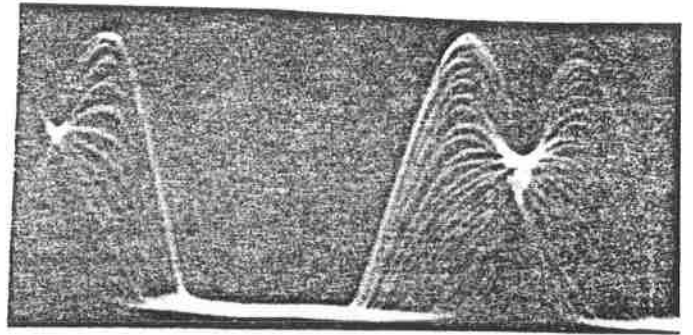
a) $B = 1544$ gaussb) $B = 2544$ gaussc) $B = 3544$ d) $B = 4544$ e) $B = 5544$ f) $B = 5544$

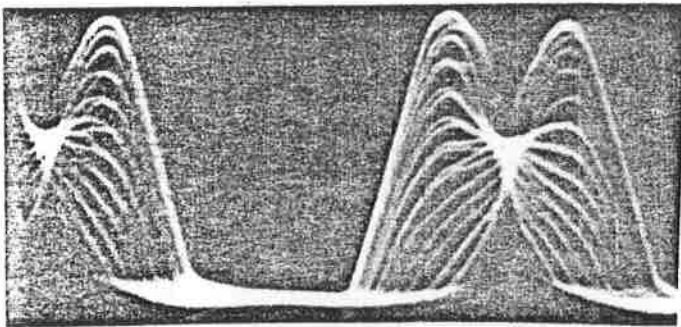
Planche 4. Evolution d'une instabilité de mode dipolaire sur la durée d'un cycle d'accélération de 50 à 800 MeV : différents stades repérés par la montée du champ magnétique B . La longueur du faisceau décroît de 250 ns à 55 ns entre le début et la fin du cycle. L'oscillation du faisceau situé à gauche sur la photo f admet une forme caractéristique de l'instabilité de fin de cycle, dont quelques exemples sont rassemblés dans la Planche 5.



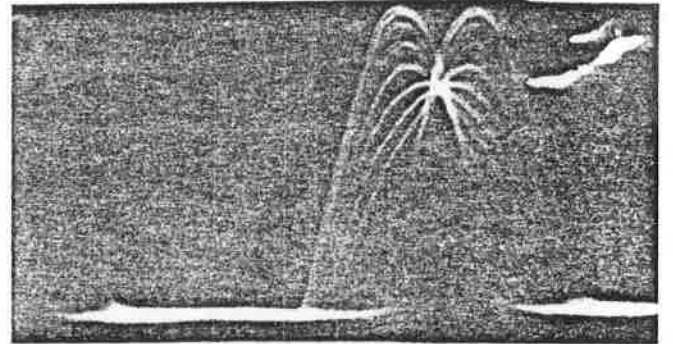
a)



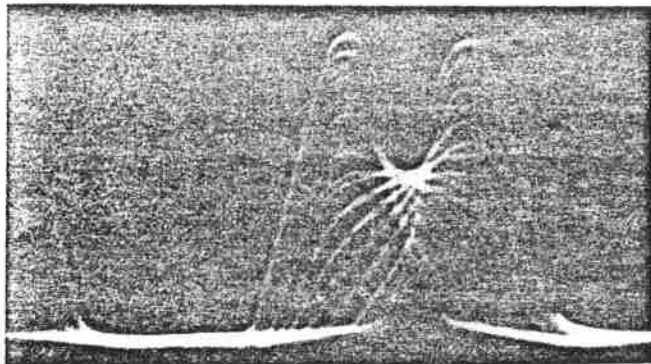
b)



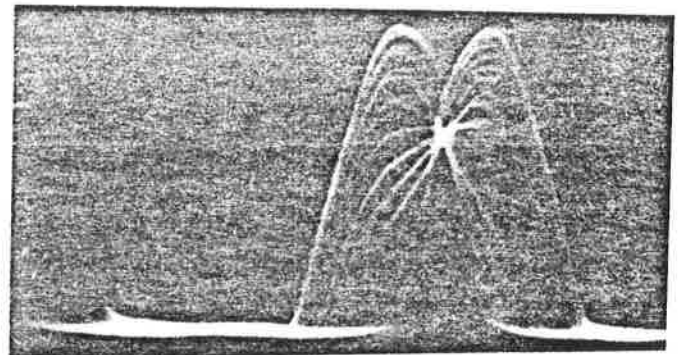
c)



d)

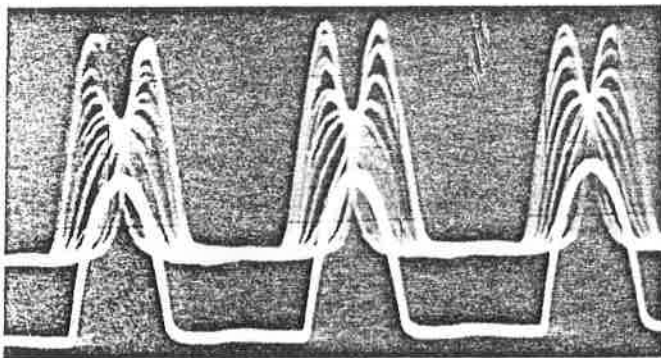


e)

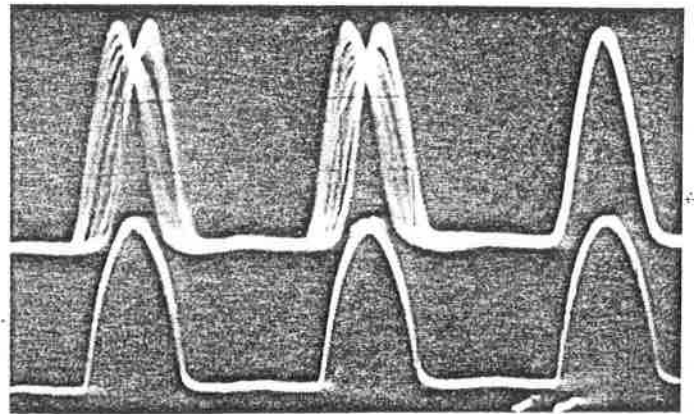


f)

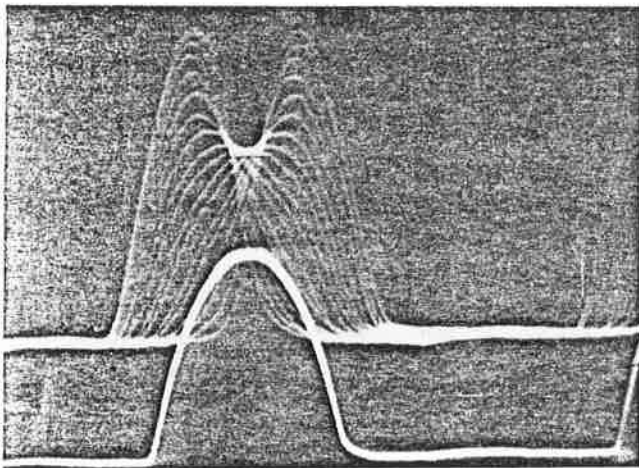
Planche 5. Oscillations de mode dipolaire caractéristiques de l'instabilité F.T.R. de fin de cycle (la montée du champ B se termine par un plat, ou "flat top ready"). Les traces de faible amplitude (excluant les traces extrêmes partant du noeud central) peuvent être rapprochées des Figures 19b et c, où l'oscillation affecte surtout le centre du faisceau. Les oscillations de grande amplitude s'en écartent nettement par l'oscillation transmise aux bords du faisceau.



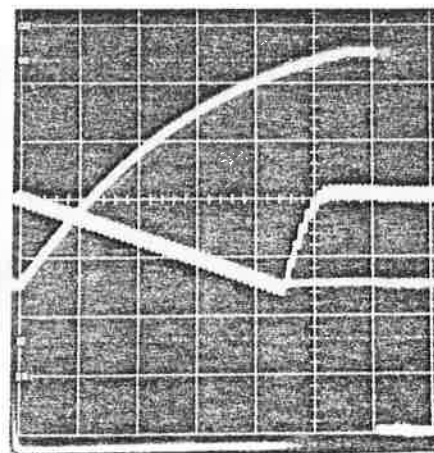
a)



b)



c)

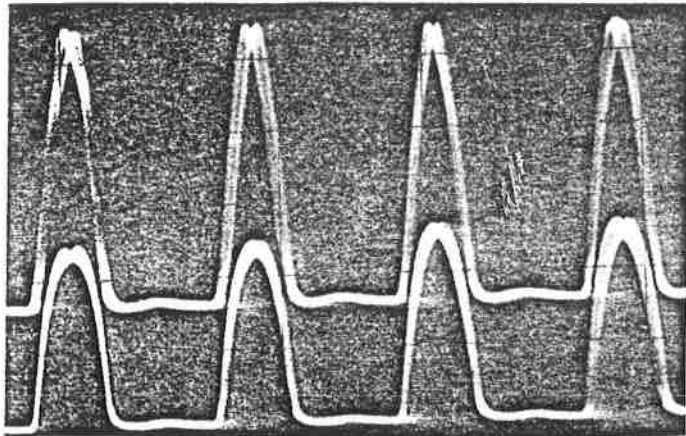


d)

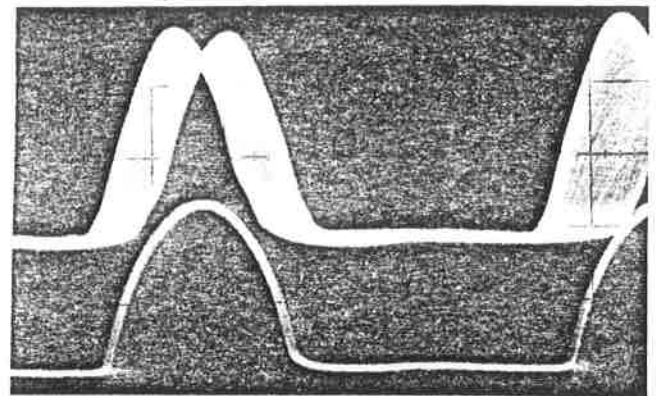
Planches 6 et 7. Illustration de techniques mises en oeuvre au C.E.R.N. pour contrôler les instabilités.

Planche 6. La fréquence synchrotronique est modulée de façon à décrire la bande des fréquences incohérentes. Les particules oscillent alternativement à des fréquences caractéristiques du centre et du bord du faisceau. Il en résulte un réarrangement des particules dans le faisceau, se soldant par un allongement du paquet et une réduction de la densité centrale (a,b,c). Cette technique illustre le critère de stabilité rappelé en (I-55) et (I-56) : $S \text{ constante} \times f_0(0)$.

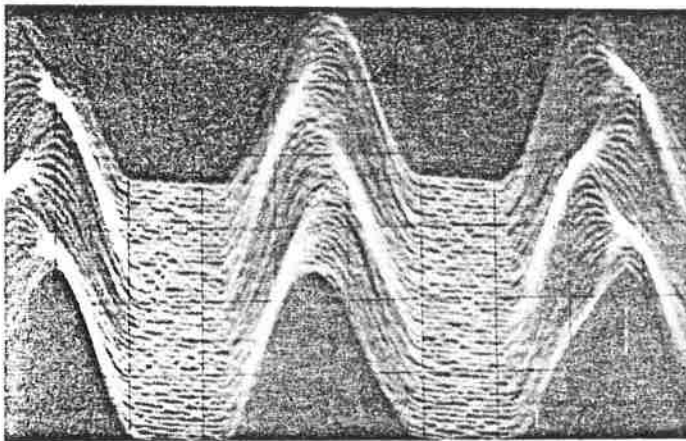
- trace supérieure : modulation nulle (instabilité FTR)
- trace inférieure : modulation de la fréquence $2f_s$ dans une bande de l'ordre de 200 Hz (d)



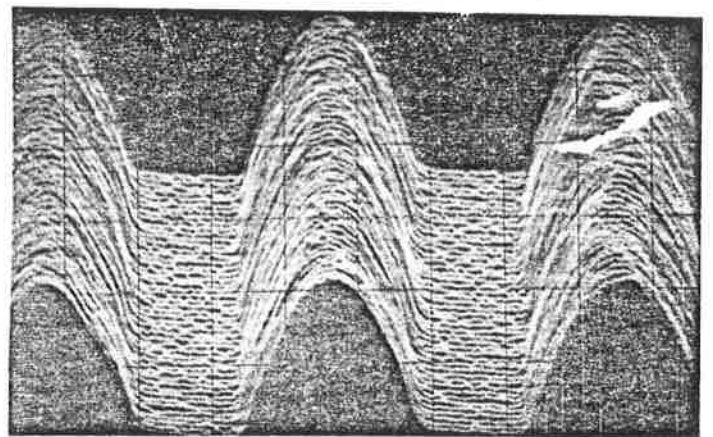
a)



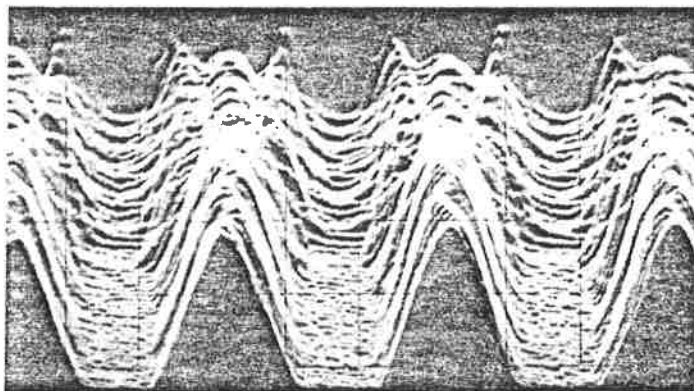
b)



c)



d)



e)

Planche 7. Stabilisation d'une oscillation dipolaire (a,b,c,d) par modulation de phase à fréquence constante (amortissement de Magnani).

trace supérieure (a,b), photo c : instabilité non contrôlée

trace inférieure (a,b), photo d : instabilité contrôlée par modulation de phase

photo h : instabilité critique lorsque le système de contrôle du faisceau est ouvert à 320 ms (milieu du cycle)

- 1) F. SACHERER : Transverse space charge effects in circular accelerators (Ph. D. Thesis) UCRL-18454 (1968).
- 2) R. GLUCKSTERN : Oscillations modes in two dimensional beams. Proc. Proton Linear Accelerator Conference, Batavia, 1970 (NAL, Batavia, 1970) p. 881.
- 3) F. SACHERER : Methods for computing bunched-beam instabilities. CERN/SI/BR/72-5 (1972).
- 4) L.J. LASLETT, V.K. NEIL, A.M. SESSLER : Transverse resistive instabilities of intense coasting beams in particle accelerators. Rev. Scient. Instrum. 36, 436 (1965).

V.K. NEIL, A.M. SESSLER : Longitudinal resistive instabilities of intense coasting beams in particle accelerators. Rev. Scient. Instrum. 8, 255 (1966).
- 5) L. LANDAU : On the vibrations of the electronic plasma. J. Phys. (USSR) 10, 25 (1946).
- 6) N.G. VAN-KAMPEN : On the theory of stationnary waves in plasmas. Physica 21, 949 (1955).
- 7) K.M. CASE : Plasma oscillations. Ann. Phys. 7, 349 (1959).
- 8) C.E. NIELSEN, A.M. SESSLER, K.R. SYMON : Longitudinal instabilities in intense relativistic beams. Proc. Int. conf. on High - Energy Accelerators and Instrumentation. CERN, 1959 (p. 241).
- 9) S. HANSEN, H.G. HERWARD, A. HOFMANN, F. HUBNER, S. MYERS : Effects of space charge and reactive wall impedance on bunched beams. CERN/ISR-RF-DI-TH-OP/75-15.

- 10) Référence 3, page 19.
- 11) F. SACHERER : A longitudinal stability criterion for bunched beams. CERN/MPS/INT.BR/73-3.
- 12) H.G. HERWARD, A. SORENSSEN : Debunching and the resistive wall. CERN/MPS/DL 69-13.
- 13) H.G. HERWARD : Landau damping by non-linearity. CERN/MPS/DL 69-11.
- 14) K. HÜBNER, V.G. VACCARO : Dispersion relations and stability of coasting particle beams. CERN/ISR/TH/70-44 (1970).
- 15) B. ZOTTER : Longitudinal stability diagrams for some particular distribution functions. CERN/ISR /GS/76-11 (1976).
- 16) F. PEDERSEN, F. SACHERER : Theory and performance of the longitudinal active damping system for the CERN PS BOOSTER CERN/PS/BR/77-8 (1977).
A. HOFMANN, B. ZOTTER : Measurement of beam stability and coupling impedance by RF excitation. CERN ISR-TH/77-12.
- 17) J. GAREYTE : Landau damping of the longitudinal quadripole mode in SPEAR II. SPEAR 207 (1977).
J. GAREYTE : Experiments on bunch-lengthening and longitudinal instabilities in SPEAR II. SPEAR 206 (1977).
- 18) D. MÖHL, H. SHÖNAUER : Landau damping by non-linear space charge forces and octupoles. CERN/MPS/DL 74-6 (1974).
- 19) G. MERLE, D. MÖHL : The stabilizing influence of non-linear space charge on transverse coherent oscillations. CERN/MPS/DL 69-14 (1969).

- 20) Référence 3, page 11.
- 21) W. MAGNUS, F. OBERHETTINGER, R.P. SONI : Formulas and theorems for the special functions of mathematical physics. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (1966), page 99.
- 22) F.J. SACHERER : Bunch lengthening and microwave instability
Part 1, CERN/PS/BR/ 77-5.
Part 2, CERN/PS/BR/ 77-6.
- 23) Référence 3, Appendice II.
- 24) F.C. GRANT, M.R. FEIX : Fourier-Hermite solutions of the Vlasov equations in the linearized limit. The phys. of Fluids, 10, 4, 697 (1967).
- 25) COURANT and HILBERT : Meth. of math. physics. Vol. 1. Interscience Publishers New-York (1953).
- 26) D. EDWARDS : Calculation of PSB Bunch Areas
MPS/BR Note/74-2 (1974).
- 27) E. REGENSTREIF : Leçons sur la fonction de Green, cours du D.E.A. d'Electronique (1977).
- 28) H. GOLDSTEIN : Mécanique classique, P.U.F. (1964).
- 29) ERDELYI & Al : Tables of Integral Transforms (Bateman manuscript project, Vol. 2), Mc Graw-Hill (1954), page 30.
- 30) Référence 29, page 48.
- 31) Référence 29, Volume 1, page 175.

REMERCIEMENTS

Ce rapport recouvre le travail d'une thèse de Doctorat d'Etat ès-Sciences-Physiques, qui doit être soutenue au cours de l'année 1978 à l'Université de Rennes. Cette étude a été effectuée, dans le cadre du Laboratoire d'Electronique, sous la direction de Monsieur le Professeur E. REGENSTREIF, auquel j'exprime ici ma très vive reconnaissance pour l'intérêt et le soutien qu'il m'a accordé.

Au terme de cette étude, j'aimerais que Monsieur Frank SACHERER trouve ici l'expression de ma profonde gratitude. Ses travaux m'ont suggéré d'entreprendre cette étude et, depuis 1972, il n'a cessé de s'intéresser et de contribuer par ses conseils à son avancement.

Je remercie vivement les responsables des divisions M.P.S. et I.S.R. qui, pendant la durée de ce travail, m'ont facilité une collaboration fructueuse avec les Physiciens du C.E.R.N. Messieurs P. GERMAIN, D. MÖHL, H. SHÖNAUER, J. GAREYTE, A. HOFMANN ont contribué à de nombreux éclaircissements lors de nos discussions au C.E.R.N.

Je remercie enfin toutes les personnes qui m'ont aidé, mes camarades de Laboratoire et Madame O. BARANGE qui a dactylographié le texte présenté aujourd'hui.

